

Hardy-Räume vektorwertiger Funktionen

Wolfgang Hansgen

Diss
München
1986

Hardy-Räume vektorwertiger Funktionen

Dissertation
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Wolfgang Hensgen
aus München

München, den 15. Januar 1986

Dr. J. Batt
Mathematisches Institut
der Universität München
München

1. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Batt

2. Berichterstatter: Prof. Dr. M. Schottenloher

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Februar 1986

ausgegeben von
Wolfgang Hoyer
aus München

München, den 12. Januar 1986

Inhalt

Einleitung	I
§0: Vorbereitungen	1
§1: Vektorwertige h^p -Funktionen	11
§2: Vektorwertige H^p -Funktionen	34
§3: Die analytische Radon-Nikodým-Eigenschaft (aRNP)	52
§4: Operatoren $H^1 \rightarrow X$	77
§5: Analytische Projektion	94
§6: Dual von $H^p(X)$	130
Literatur	151

Einleitung

Als H^p -Funktionen bezeichnet man diejenigen holomorphen Funktionen f auf der Einheitskreisscheibe D mit $\|f\|_p < \infty$, wobei

$$\|f\|_p := \sup_{r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty) \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty := \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Die Theorie dieser Funktionen liegt an der Nahtstelle von reeller, harmonischer und komplexer Analysis. Sie wurde seit der Jahrhundertwende (Fatou 1906 [28]) entwickelt und kann mittlerweile als klassisch gelten, s. die Lehrbücher [Pr], [Ho], [Z ch.VII], [Du], [R ch.17], [Ko], [G].

Der Hardyraum H^p (also der Raum der H^p -Funktionen) ist mit obiger Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum falls $1 \leq p \leq \infty$, ein topologischer Vektorraum falls $0 < p < 1$. Daher ergibt sich eine natürliche Verbindung zur Funktionalanalysis, insbesondere zur Banachraumtheorie (Hauptreferenz hierzu ist [Pe]).

Es ist selbstverständlich, daß dieser Aspekt noch wesentlich stärker in Erscheinung tritt, wenn man vektorwertige (d.h. in dieser Arbeit stets banachraumwertige) H^p -Funktionen und Hardyräume untersucht. Dies wurde 1962/63 von Ryan begonnen ([64],[65]) (meist für den Fall des Duals eines separablen Banachraums) und im wesentlichen von Bukhvalov [15] und Bukhvalov/Danilevich [16] fortgeführt (allgemeiner Fall). Eine übersichtliche und vereinfachte Darstellung dieser Theorie bildet einen Teil der ersten 3 Paragraphen der vorliegenden Arbeit (nachdem in §0 einige vorbereitende Ausführungen, insbesondere über das Gel'fand-Integral, gemacht werden).

In §1 behandle ich zunächst den Fall harmonischer (nicht notwendig holomorpher) Funktionen $f: D \rightarrow Y$ mit $\|f\|_p < \infty$ (Y Banachraum, $1 \leq p \leq \infty$), d.h. $f \in h^p(Y)$. Die Poisson-Stieltjes- bzw. Poisson-Integraldarstellung ($p=1$ bzw. $p>1$) von $h^p(Y)$ -Funktionen (1.5) durch Maße bzw. Gel'fand-integrierbare Funktionen auf dem Rand ist bekannt. In (1.7) wird gezeigt, daß wie im skalaren Fall die Existenz von $\mu'(\theta)$ die des Winkelgrenzwerts des Poisson-Stieltjes-Integrals $P[d\mu]$ in $e^{i\theta}$ impliziert ($\mu: [-\pi, \pi] \rightarrow Y$ von beschränkter Variation). Dieser Satz findet sich bisher nicht in der Literatur, wohl aber sein Corollar (1.9): Das Poisson-Integral $P[\varphi]$ einer (Bochner-integrierbaren) Funktion $\varphi \in L^p(Y)$ hat f.ü. nichttangente Limiten $\varphi(e^{i\theta})$. Der vektorwertige Satz von Hardy-Littlewood (1.10) scheint

ebenfalls neu zu sein. Er erlaubt einen einfachen Beweis des bekannten Satzes (1.11), der im wesentlichen von Konvergenz im p. Mittel handelt.

Bukhvalov und Danilevich zeigten in [16] den grundlegenden Zusammenhang zur Radon-Nikodým-Eigenschaft (RNP) von Banachräumen [DU] auf: Sei $1 < p < \infty$ fest. Genau dann haben alle $f \in h^p(Y)$ einen starken radialen Limes, wenn Y die RNP hat. Ich kann dies auch für $p = \infty$ und $p = 1$ zeigen (1.12); hier zählt sich die detaillierte Untersuchung des Poisson-Stieltjes-Integrals in (1.7) aus (wenn sie auch genauso wie im skalaren Fall verläuft).

Von den Aussagen (1.13) - (1.16) über schwache, schwach*- und Limiten in der starken Operatortopologie ist (1.15) bekannt.

§2 (vektorwertige H^p -Funktionen) folgt z.T. dem Muster von §1, da ja $H^p(Y)$ einfach aus den holomorphen $h^p(Y)$ -Funktionen besteht. Wie im skalaren Fall betrachtet man auch $0 < p < 1$ sowie die Nevanlinna-Klasse $N(Y) := \{f: D \rightarrow Y \text{ holomorph: } \sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\}$,

die alle $H^p(Y)$ umfaßt. Der bekannte Satz (2.5) über Poisson-Integraldarstellung entspricht (1.5) mit dem gewohnten Unterschied bei $p = 1$ (vgl. die Einleitung zu §2); der analytische Satz von Hardy-Littlewood (2.6) entspricht (1.10) und erleichtert den Beweis des (1.11) entsprechenden Satzes (2.7), in dem die Aussagen für $p < 1$ neu sind.

Für den wichtigen vektorwertigen Satz von F. und R. Nevanlinna (2.8), der "ohne Beweis bekannt" ist, gebe ich ein Argument, das selbst die skalaren Beweise der Lehrbuchliteratur vereinfacht. Als wichtigste Folgerung (2.9) ergibt sich die für $p \geq 1$ bekannte p-Unabhängigkeit der Aussage "alle $f \in H^p(Y)$ haben f.ü. einen starken radialen (oder nichttangentialen) Limes", $0 \leq p \leq \infty$ (wobei $H^0(Y) := N(Y)$). Diese Aussage nehmen Bukhvalov und Danilevich ([15], [16]) als Definition der "analytischen Radon-Nikodým-Eigenschaft" (aRNP) von Y . Meine Definition als natürliche Abschwächung der RNP ist zu ihrer äquivalent (2.10). Ein altes Standardbeispiel zeigt, daß c_0 die aRNP nicht hat (2.12) [15].

Die Abschnitte (2.13) - (2.15) entsprechen (1.13) - (1.16), wobei (2.13), (2.14) über schwache bzw. schwach*-Limiten auch aus Sätzen von Danilevich [21] folgen; (2.15) verbessert einen Satz von Kaballo [42].

Abschließend in diesem Paragraphen zeige ich, daß man die Existenzmenge von Randwerten ziemlich willkürlich vorschreiben kann (2.16);

insbesondere braucht eine $H^\infty(X')$ -Funktion in keinem Randpunkt auch nur einen schwach*-radialen Limes besitzen (2.17).

§3 behandelt die analytische Radon-Nikodým-Eigenschaft (aRNP). Die wichtigste Aussage darüber stammt von Bukhvalov und Danilevich [16]: Jeder komplexe Banachverband, der c_0 nicht enthält, also insbesondere jeder $L^1(\mu)$ -Raum, hat die aRNP. Ich gebe zunächst einen, wie ich hoffe, durchsichtigen Beweis für den Spezialfall $L^1(\mu)$, allgemeiner: für $L^p(\mu, X)$, falls X die aRNP hat, $1 \leq p < \infty$ (3.1). L^1/H_0^1 , "obwohl" schwach folgenvollständig, hat die aRNP nicht; ich gebe eine ausführliche Diskussion des bekannten Beispiels einer $H^\infty(L^1/H_0^1)$ -Funktion, die das zeigt. Anschließend gehe ich auf Semi- (allgemeiner: Semi- H_0)-Einbettungen ein (zur Definition s. (3.4)). Ist X separabel, hat Y die aRNP und gibt es eine Semi- H_0 -Einbettung $X \rightarrow Y$, so hat X die aRNP. Der Beweis folgt leicht aus dem Satz (3.4) für individuelle Vektormäße, der von Ghoussoub und Maurey [31] bewiesen (wenn auch nicht konstatiert) wurde. Da ein (o.B.d.A. separabler) Banachverband, der c_0 nicht enthält, in einen $L^1(\mu)$ -Raum semi-einbettet, hat man damit einen einfachen Beweis des allgemeinen Falls des Satzes von Bukhvalov und Danilevich (3.5).

Die operatortheoretische Charakterisierung der aRNP (3.8) und ihr Corollar (3.9) wurden inzwischen unabhängig von mir auch von Dowling [25] erzielt. Sie ist analog zu der der RNP [DU III], nur übernimmt L^1/H_0^1 die Rolle von L^1 . Wie in der L^1 -Situation sind schwach kompakte Operatoren $L^1/H_0^1 \rightarrow X$ Riesz-darstellbar, diese sind Dunford-Pettis, und beide Umkehrungen sind falsch (3.10). Leider kann ich nicht entscheiden, ob das Dual JT' oder Prädual B des James tree space JT [46] die aRNP haben. Warum diese Kenntnis wichtig wäre und daß man die Frage nicht elegant vermöge Semi-Einbettungen lösen kann, wird in (3.12) diskutiert.

In §4 untersuche ich Operatoren $H^1 \rightarrow X$ (oder $\bar{H}^1 \rightarrow X$), in Analogie zu den Abschnitten (3.8), (3.10), wo es um Operatoren $L^1/H_0^1 \rightarrow X$ ging. Die Ergebnisse sind aber völlig unterschiedlich. In (4.6) wird etwa gezeigt, daß zwischen den Eigenschaften "schwach kompakt", "darstellbar durch $H^\infty(X)$ *- bzw. $L^\infty(X)$ -Funktion", "Dunford-Pettis" eines Operators $\bar{H}^1 \rightarrow X$ außer den trivial gültigen i.a. keine Implikationen bestehen. Sind alle Operatoren $\bar{H}^1 \rightarrow X$ durch $H^\infty(X)$ -Funktionen darstellbar, so hat X sogar die RNP (4.2); sind sie es nur

* $H^p(X) = \{\varphi \in L^p(X) : \hat{\varphi}(n) = 0 \ \forall n < 0\}$, s. (2.5)

durch $L^\infty(X)$ -Funktionen, so kann ich daraus nicht einmal auf die aRNP für X schließen. Die dabei auftretende Pathologie (4.5) ist wohl für sich von Interesse.

Ein durch eine $L^\infty(X)$ -Funktion darstellbarer Operator $R: H^1 \rightarrow X$ ist trivialerweise auf L^1 fortsetzbar, und umgekehrt, falls X RNP hat. Der "Hardy-Operator" $H: H^1 \rightarrow L^p$, $f \mapsto (\frac{\hat{f}(n)}{n^{1/p}})_{n \in \mathbb{N}}$, $1 \leq p < \infty$, ist nicht

auf L^1 fortsetzbar (4.7) (dies ist zumindest für $p = 1, 2$ bekannt). Im Beweis kommen Tensorprodukte ins Spiel. Bekanntlich gilt stets $L^1 \hat{\otimes} X = L^1(X)$ [DU VIII], dagegen gilt $H^1 \hat{\otimes} X \cong H^1(X)$ (kanonisch) dann und nur dann, wenn alle $R: H^1 \rightarrow X'$ auf L^1 fortsetzbar sind (4.8), was nach obigem i.a. nicht der Fall ist.

Unter der analytischen (oder Riesz-)Projektion einer Funktion $f \in L^p(X)$ ($1 < p < \infty$) mit formaler Fourierreihe $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta}$

versteht man, falls existent, die Funktion f^a mit formaler Fourierreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta}$. Im skalaren Fall existiert f^a stets in L^p ,

und der Operator $A: L^p \rightarrow L^p$, $f \mapsto f^a$ ist beschränkt ($1 < p < \infty$). Dies ist der berühmte Satz von M. Riesz [Ho p.151f.]. §5 untersucht die Frage, wann dieser auf den vektorwertigen Fall übertragbar ist.

Dies gilt z.B. für $X = L^p(\mu)$ ($1 < p < \infty$) (5.2). Ich sage dann kurz "X hat die analytische Projektion (p)". Nach (5.3) sind dazu äquivalent: $H^p(X)$ ist komplementiert in $L^p(X)$, sowie: $H^p(X)$ ist komplementiert in $h^p(X)$. Die duale Beschreibung in (5.4): "X hat die analytische Projektion (p) $\Leftrightarrow$ X' hat die analytische Projektion (q)" ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) stammt von Bukhvalov [15].

Der lange Satz (5.6) zeigt die Äquivalenz der analytischen Projektion zu den wichtigen singulären Integraloperatoren der harmonischen Analysis, insbesondere zur Hilberttransformation auf der Geraden. Dies gilt unter den Experten als "well-known"; ich hielt es aber nach Sichtung der Literatur schon für erforderlich, all diese Äquivalenzen einmal genau zu formulieren und vollständig zu beweisen ((5.7), (5.8)). Eine bekannte Folgerung ist, daß die Existenz der analytischen Projektion (p) nicht von $p \in (1, \infty)$ abhängt (5.9).

Modulo Satz (5.6) folgt aus jüngsten Arbeiten von Burkholder [17](*) und Bourgain [8](*) die Äquivalenz der analytischen Projektion zur sog. "UMD"-Bedingung für Banachräume, vgl. die Diskussion in (5.10). Nur superreflexive Räume sind UMD. Kurz vor

dem Erscheinen von Bourgain's Arbeit [8] konnte ich durch konkrete Beispiele zeigen, daß z.B. c_0, l^1, L^1, B die analytische Projektion für kein p haben, was nun natürlich auch aus obiger Theorie folgt. Diese Beispiele (5.12) - (5.14), (6.9) weisen aber noch größere Pathologien auf, etwa daß die analytische Projektion einer $h^\infty(X)$ -Funktion (die man als holomorphe Funktion auf D immer bilden kann) nicht einmal in $N(X)$ liegen muß. (Nach Satz (5.11) muß dies übrigens stets eintreten, falls X die $aRNP$, aber nicht die RNP hat, also z.B. für $X = L^1$.)

Der letzte Paragraph der Arbeit ist der Beschreibung des Duals von $\mathbb{H}^p(X)$ als Funktionenraum gewidmet ($1 < p < \infty$). Zunächst wirkt jedes $g \in \bar{\mathbb{H}}^q(X')$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) durch Integration in kanonischer Weise als Funktional G auf $\mathbb{H}^p(X)$ und die Abbildung $\bar{\mathbb{H}}^q(X') \rightarrow \mathbb{H}^p(X), g \mapsto G$ ist injektiv und stetig. Da man in der skalaren Theorie für die Beschreibung $\mathbb{H}^p \cong \bar{\mathbb{H}}^q$ [Du ch.7] den Satz von M. Riesz braucht, ist folgender Satz (6.0) von Bukhvalov [15] nicht überraschend: $\mathbb{H}^p(X)' \cong \bar{\mathbb{H}}^q(X')$ (unter obiger Abbildung) $\Leftrightarrow X'$ hat die analytische Projektion (q).

Im allgemeinen Fall kann ich $\mathbb{H}^p(X)'$ als Raum $\bar{\mathbb{H}}^q_*(X')$ von antiholomorphen Funktionen auf D beschreiben (6.4), und dieser Darstellung ordnet sich der Satz von Bukhvalov in natürlicher Weise unter (6.5). Leider ist die Darstellung aber auch für konkrete Banachräume ohne analytische Projektion, z.B. $X = c_0$, nicht sehr konkret. In (6.6), (6.7) werden einige Aussagen über die Lage von $\bar{\mathbb{H}}^q(X')$ in $\bar{\mathbb{H}}^q_*(X') = \mathbb{H}^p(X)'$ abgeleitet.

Ein $g \in \bar{\mathbb{H}}^q_*(X')$ wirkt auf $f \in \mathbb{H}^p(X')$ nicht als Integral, sondern nur als Limes ($r \rightarrow 1$) von Integralen über die Kreislinien vom Radius $r < 1$. g hat nämlich i.a. auch im schwächstmöglichen Sinn keine Randwerte $g^*(e^{it})$ (6.8), was eng mit dem in §5 aufgezeigten pathologischen Verhalten der analytischen Projektion verknüpft ist. Ist X' RNP -Raum, so gilt $g(rz) \rightarrow g(z)$ ($r \rightarrow 1$) in der Norm von $\bar{\mathbb{H}}^q_*(X')$ (6.7), aber auch das erzwingt keine Randwerte g^* . Dies wird belegt durch das $X' = l^1$ -wertige Beispiel (6.9), das die Arbeit abschließt.

Herrn Prof. J. Batt danke ich herzlich für die Ausgabe des für mich sehr interessanten Themas und für seine ständige Betreuung meiner Arbeit. Ich danke auch Herrn Priv.-Doz. Dr. V. Aurich für so manche interessante Diskussion.

§0: Vorbereitungen

Es werden einige Bezeichnungen und Konventionen eingeführt. Danach gehe ich etwas ausführlicher auf die Räume $L^q(X', X)$ Gel'fand-integrierbarer Funktionen ein, die in dieser Arbeit ausgiebig benutzt werden. Alle Aussagen dieses Paragraphen sind wohl-bekannt, auch wenn kein Zitat, sondern ein Beweis gegeben wird.

(0.1) Verschiedene Bezeichnungen

1° $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2° $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, Σ ist die Borel- σ -Algebra von T . $d\lambda = \frac{d\bar{z}}{2\pi}$ ist das (von $[0, 2\pi)$ auf T übertragene) normalisierte Lebesgue-Maß auf T (d.h. auf Σ).

$e^{i\theta} \in T$ wird ständig mit $\theta \in [0, 2\pi)$ (oder $\in (-\pi, \pi]$) identifiziert.

Ist μ ein Maß und f eine Funktion auf T , sodaß $\int_T f d\mu$ in irgend-einem Sinn definiert ist, so schreibt man dafür auch

$$\int_T f d\mu = \int_T f d\mu = \int_0^{2\pi} f(t) d\mu(t) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t) \text{ etc.,}$$

falls $\mu = \lambda$ natürlich auch $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{dt}{2\pi}$ etc. (vgl. dazu [R 11.6]).

Funktionen auf $[0, 2\pi)$ sind bei Bedarf 2π -periodisch fortzusetzen.

3° Notationen in (skalarer) H^p -Theorie sind Standard [Du] mit

folgender Ausnahme: $h^p = h^p(\mathbb{C}) =$

$$\{u: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ harmonisch} : \|u\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

4° χ_E ist die Indikatorfunktion von E .

(0.2) Banachräume

1° Der Skalarenkörper ist grundsätzlich $\mathbb{C}$, bis auf wenige Ausnahmen, die aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgehen. Banach-räume werden mit X, Y, Z bezeichnet. $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ für einen Banachraum X .

2° Operatoren zwischen Banachräumen sind grundsätzlich linear und stetig, auch wenn dies nicht immer hingeschrieben wird. Seien

X, Y Banachräume.

$L(X, Y) := \{S: X \rightarrow Y \text{ linear, stetig}\}; L(X) := L(X, X).$

$K(X, Y) := \{S \in L(X, Y): S \text{ kompakt}\}; K(X) := K(X, X).$

$X' := L(X, \mathbb{C}); \langle x, x' \rangle = x'(x) \text{ für } x \in X, x' \in X'.$

3° Isomorphismen sind surjektiv, Isometrien nicht notwendig.

Eine Einbettung ist ein Isomorphismus aufs Bild. Gibt es eine

Einbettung $X \rightarrow Y$, so schreibt man $X \hookrightarrow Y$ oder auch $X \subset Y$. $X \overset{\oplus}{\hookrightarrow} Y$ heißt "Einbettung mit komplementiertem Bild".

4° Sei Γ Menge, $1 \leq p \leq \infty$. $l^p(\Gamma) := \{z = (z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbb{C}^\Gamma : \|z\|_p < \infty\}$, wobei

$$\|z\|_p := \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |z_\gamma|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|z\|_\infty := \sup_{\gamma \in \Gamma} |z_\gamma|.$$

Ist insbesondere $\Gamma = n \in \mathbb{N}_0$, schreibe ich $l^p(n)$ (in der Literatur ist dafür die Bezeichnung l_n^p oder l_p^n üblich). Ist $\Gamma = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$, schreibt man natürlich l^p .

5° Sei Ω Menge, X Banachraum, $f: \Omega \rightarrow X, g: \Omega \rightarrow X'$. Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreibe ich

$\|f\|$ für die Funktion $\|f(\cdot)\|: \omega \mapsto \|f(\omega)\|$,

$\langle f, g \rangle$ für die Funktion $\langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle: \omega \mapsto \langle f(\omega), g(\omega) \rangle$.

(0.3) Räume von Funktionen und Maßen

Die Notation unterliegt hier folgendem Prinzip: Sei etwa Ω Menge, X Banachraum, $V(\Omega, X)$ ein Raum von Funktionen $\Omega \rightarrow X$.

Ist $\Omega = T$, schreibe ich kurz $V(X)$.

Ist $X = \mathbb{C}$, schreibe ich kurz $V(\Omega)$.

Ist $\Omega = T$ und $X = \mathbb{C}$, schreibe ich kurz V .

Die ersten beiden Abkürzungen sind natürlich logisch nicht unzweideutig, aber da ein (komplexer!) Banachraum nie als Ω vorkommt, sind keine Verwechslungen zu befürchten. (So ist z.B. $L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.)

1° Sei K kompakter Raum, X Banachraum.

$C(K, X) := \{f: K \rightarrow X \text{ stetig}\}$ mit Supremumsnorm.

$C(X) := C(T, X); C(K) := C(K, \mathbb{C}); C := C(T, \mathbb{C}).$

2° Vektormaße sind σ -additiv. Ansonsten folgen die Bezeichnungen [DU], insbesondere wird die Variation eines Vektormaßes μ mit $|\mu|$ bezeichnet. Sei K kompakter Raum mit Borel- σ -Algebra Σ_K , und sei X Banachraum.

$M(K, X) := \{ \mu: \Sigma_K \rightarrow X \text{ reguläres Vektormaß von beschränkter Variation} \}$
mit Variationsnorm $\|\mu\| = |\mu|(K)$.

$M(X) := M(T, X)$; $M(K) := M(K, \mathbb{C})$; $M := M(T, \mathbb{C})$.

3° Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (positiver) Maßraum, X Banachraum, $0 < p \leq \infty$.

$L^p(\mu, X)$ (oder $L^p(\Omega, X)$) ist, wie üblich, der Raum der (Äquivalenzklassen von) p -fach Bochner-integrierbaren Funktionen mit Werten in X ([DU II], [L X, XI], [Di §12]).

$L^p(X) := L^p(\lambda, X)$; $L^p(\mu) := L^p(\mu, \mathbb{C})$; $L^p := L^p(\lambda, \mathbb{C})$. $L^p_+(\mu) := \{ f \in L^p(\mu) : f \geq 0 \text{ f.ü.} \}$.

(0.4) Integration bezüglich eines Vektormaßes

1° Sei K kompakter Raum, X Banachraum, $\mu \in M(K, X)$. Man überzeugt sich leicht, daß man für $f \in L^1(|\mu|)$ (z.B. für $f \in C(K)$) $\int_K f d\mu \in X$ wie üblich definieren kann (approximiere f in $L^1(|\mu|)$ durch Treppenfunktionen). Es gilt $\|\int_K f d\mu\| \leq \int_K \|f\| d|\mu|$.

2° Sei nun $\mu \in M(K; X')$. Man verifiziert leicht, daß man für $f \in L^1(|\mu|, X)$ (z.B. für $f \in C(K, X)$) $\int_K \langle f, d\mu \rangle \in \mathbb{C}$ wie üblich definieren kann (approximiere f in $L^1(|\mu|, X)$ durch Treppenfunktionen).

Es gilt $\|\int_K \langle f, d\mu \rangle\| \leq \int_K \|f\| d|\mu|$.

3° Satz von Singer: Die Abbildung

$M(K, X') \rightarrow C(K, X)'$, $\mu \mapsto \int_K \langle \cdot, d\mu \rangle$

ist isometrischer Isomorphismus.

Beweis: [67 p.398ff.]

Ich benötige den Satz nur für $K=T$; er lautet dann kurz $C(X)' = M(X')$.

In den folgenden Abschnitten beschränke ich mich, der Einfachheit der Notation halber, auf den Fall des Maßraums (T, Σ, λ) .

(0.5) Die Räume $L^q(X', X)$

Sei X Banachraum, $1 \leq q \leq \infty$.

1° Sei $f: T \rightarrow X'$ eine Funktion mit $\langle x, f \rangle \in L^1 \quad \forall x \in X$ ("f ist skalar (bzgl. X) integrierbar"). Für $E \in \Sigma$ ist das Gel'fand-Integral

$(G) \int_E f d\lambda \in X'$ definiert durch

$$\langle x, (G) \int_E f d\lambda \rangle := \int_E \langle x, f \rangle d\lambda \quad \forall x \in X \quad [\text{DU p. 53}].$$

$f, g: T \rightarrow X'$ heißen "skalar (bzgl. X) äquivalent" (in Zeichen $f \sim_X g$)

$\Leftrightarrow \forall x \in X: \langle x, f \rangle = \langle x, g \rangle$ f.ü. Sind f, g skalar integrierbar und äquivalent, so ist offenbar $(G) \int_E f d\lambda = (G) \int_E g d\lambda \quad \forall E \in \Sigma$.

2° Es sei daran erinnert, daß der Banachverband $L^q(\lambda, \mathbb{R})$ ordnungsvollständig ist [LT II p.4], d.h. jede in L^q nach oben beschränkte Teilmenge von L^q besitzt ein Supremum in L^q (Supremum im Sinne der Ordnung von L^q , das ich mit L^q -sup bezeichne).

Es sei $\mathcal{L}^q(X', X) = \mathcal{L}^q(\lambda; X', X) :=$

$\{f: T \rightarrow X': \langle x, f \rangle \in L^q \quad \forall x \in X, \{|\langle x, f \rangle| : \|x\| \leq 1\} \text{ ist in } L^q \text{ nach oben beschränkt}\}$.

Für $f \in \mathcal{L}^q(X', X)$ sei $v_f = v_f^{(q)} := L^q\text{-sup}_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|$ und $\|f\|_q = \|v_f\|_q$.

$\|\cdot\|_q$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^q(X', X)$ mit Nullraum $\{f \in \mathcal{L}^q(X', X) : f \sim_X 0\}$.

Es sei $L^q(X', X) = L^q(\lambda; X', X) := \mathcal{L}^q(X', X) / \|\cdot\|_q^{-1}(0)$ mit der assoziierten Norm $\|\varphi\|_q := \|v_\varphi\|_q \quad (f \in \varphi \in L^q(X', X))$.

Für $\varphi \in L^q(X', X)$ sind $\langle x, \varphi \rangle \in L^q \quad (x \in X), v_\varphi \in L^q, (G) \int_E \varphi d\lambda \quad (E \in \Sigma)$ wohldefiniert, da nicht von der Auswahl des Repräsentanten abhängig.

Sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Es gilt (im offenbar wohldefinierten Sinn):

$L^q(X', X) \subset L^p(X', X)$ als Vektorräume, mit stetiger Inklusion; genauer:

$$\varphi \in L^q(X', X) \Rightarrow v_\varphi^{(p)} \leq v_\varphi^{(q)} \text{ f.ü. } \Rightarrow \|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_q.$$

3° Sei $f \in \mathcal{L}^q(X', X)$. In folgenden Fällen ist $v_f = f$ f.ü.:

a) f ist (stark) meßbar

b) X ist separabel

Beweis: Gilt a), so ist f essentiell, also o.E. überall, separabel-

wertig. In beiden Fällen (a) oder b)) gibt es also eine den Wertebereich R von f normierende abzählbare Teilmenge $A \subset B_X$, d.h.

$$\forall x' \in R: \|x'\| = \sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle|.$$

Für $t \in T$ ist also $\|f(t)\| = \sup_{x \in A} |\langle x, f(t) \rangle| \leq v_f(t)$ f.ü. (denn

$$\forall x \in B_X: |\langle x, f(t) \rangle| \leq v_f(t) \text{ f.ü. und } A \text{ ist abzählbar}).$$

Umgekehrt: In beiden Fällen ist offenbar $\|f\|$ meßbar, und nach der eben bewiesenen Ungleichung ist $\|f\| \in L^q$. Da $\forall x \in X, \|x\| \leq 1: |\langle x, f \rangle| \leq \|f\|$, folgt $v_f \leq \|f\|$ f.ü. nach Definition von v_f , q.e.d.

Anmerkung: Die Voraussetzung " $\|f\| \in L^q$ " genügt nicht, wie das Beispiel $f: T \rightarrow l^2(T)$, $f(t) := e_t := (\delta_{\theta t})_{\theta \in T}$ zeigt. Hier ist $v_f = 0$, aber $\|f\| = 1$.

4°a) Aus 3°a) folgt, daß die kanonische Inklusion $L^q(X') \rightarrow L^q(X', X)$, $\varphi \mapsto \varphi$ isometrisch ist (sie ist zunächst wohldefiniert, da aus $f=0$ f.ü. auch $f \sim 0$ folgt). Damit ist $L^q(X') \subset L^q(X', X)$ abgeschlossener Teilraum.

b) Aus 3°b) folgt, daß für separables X gilt:

$$L^q(X', X) = \{f: T \rightarrow X': \langle x, f \rangle \in L^q \forall x \in X, \|f\| \in L^q\} \text{ modulo } f=0 \text{ f.ü.,}$$

$$\text{mit Norm } \|f\|_q = \|\|f\|\|_q = \left(\int_T \|f\|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \text{ bzw. } \sup_{\theta \in T} \|f(\theta)\|.$$

5°Lemma: Seien $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\underline{a)} \varphi \in L^1(X', X) \Rightarrow \int_E (g) \int \varphi d\lambda \leq \int_E v_\varphi d\lambda \leq \|\varphi\|_1, \quad E \in \Sigma.$$

$$\underline{b)} f \in L^p, \quad g \in L^q(X', X) \Rightarrow fg \in L^1(X', X) \text{ und } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

$$\underline{c)} f \in L^p(X), \quad g \in L^q(X', X) \Rightarrow \langle f, g \rangle \in L^1 \text{ und}$$

$$\|\langle f, g \rangle\|_1 \leq \int_T |\langle f, g \rangle| d\lambda \leq \int_T \|f\| v_g d\lambda \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

$$\underline{\text{Beweis: a)}} \text{ Sei } x \in B_X \Rightarrow |\langle x, \varphi d\lambda \rangle| = \left| \int_E \langle x, \varphi \rangle d\lambda \right| \leq \int_E |\langle x, \varphi \rangle| d\lambda \leq \int_E v_\varphi d\lambda.$$

Wende nun sup links an. Die 2. Ungleichung ist trivial.
 $x \in B_X$

b) Zunächst ist die skalare Äquivalenzklasse von fg unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten von $g \in L^q(X', X)$ (und von $f \in L^p(X)$).

$$\text{Für } x \in B_X \text{ ist } |\langle x, fg \rangle| = |f| |\langle x, g \rangle| \leq |f| v_g^{(q)} \in L^1$$

$$\Rightarrow fg \in L^1(X', X) \text{ und } v_{fg}^{(1)} \leq |f| v_g^{(q)}, \text{ woraus die Behauptung folgt.}$$

c) Zunächst ist $\langle f, g \rangle$ f.ü. eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von

der Auswahl des Repräsentanten von g (und von f , was trivial ist).
Denn wähle Treppenfunktionen $f_n \rightarrow f$ f.ü. mit $\|f_n\| \leq 2\|f\|$ f.ü. (dies für spätere Zwecke). Dann gilt $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$ f.ü. Ist nun $g \sim_X 0$, so ist $\langle f_n, g \rangle = 0$ f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$, also $\langle f, g \rangle = 0$ f.ü.

Weiter sind alle $\langle f_n, g \rangle$ meßbar, also auch $\langle f, g \rangle$. Ich zeige nun die mittlere Ungleichung (die beiden anderen sind trivial) zunächst für

eine Treppenfunktion $\tilde{f}$ statt f : Sei etwa $\tilde{f} = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{A_k}$ (A_k disjunkt)
 $\Rightarrow \langle \tilde{f}, g \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, g \rangle \chi_{A_k} \in L^1$ und $\int_T |\langle \tilde{f}, g \rangle| d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} |\langle x_k, g \rangle| d\lambda \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \|x_k\| v_g d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \|\tilde{f}\| v_g d\lambda = \int_T \|\tilde{f}\| v_g d\lambda.$$

Die Ungleichung gilt also für alle f_n statt f . Daraus folgt

$$\int_T |\langle f, g \rangle| d\lambda \leq \liminf_{\text{Fatou}} \int_T |\langle f_n, g \rangle| d\lambda \leq \liminf \int_T \|f_n\| v_g d\lambda = \int_T \|f\| v_g d\lambda,$$

da $\|f_n\| v_g \rightarrow \|f\| v_g$ f.ü. und mit integrierbarer Majorante $2\|f\| v_g$, q.e.d.

Nach Teil c) des Lemmas wirkt jedes $g \in L^q(X', X)$ als stetiges lineares Funktional der Norm $\|g\|_q$ auf $L^p(X)$ ($1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Die Bedeutung der Räume $L^q(X', X)$ liegt nun in folgendem Satz, der eine Hauptanwendung der Theorie des "lifting" [IT] ist.

(0.6) Satz: Sei X Banachraum, $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Abbildung

$$L^q(X', X) \rightarrow L^p(X)', \quad g \mapsto G, \quad \text{wobei } Gf := \langle f, g \rangle := \int_T \langle f, g \rangle d\lambda \quad (f \in L^p(X)),$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

(Insbesondere ist $L^q(X', X)$ Banachraum, $1 \leq q \leq \infty$.)

Diese Darstellung des Duals von $L^p(X)$ stammt von Bukhvalov ([12 thm. 7], [15 thm 0.1]). Da der Satz in [loc.cit.] praktisch nicht bewiesen wird, zeige ich die Äquivalenz dieser Darstellung zu der in der westlichen Literatur eher verbreiteten aus [IT] (vgl. z.B. [4 1.]).

Für eine Funktion $\varphi: T \rightarrow [0, \infty]$ sei

$$\begin{aligned} \int_T \varphi d\lambda &:= \inf_T \{ \int \psi d\lambda : \psi: T \rightarrow [0, \infty] \text{ meßbar, } \psi \geq \varphi \} \\ &= \inf_T \{ \int \psi d\lambda : \psi \in L^1, \psi \geq \varphi \text{ f.ü.} \} \quad (\text{wobei } \inf \emptyset := \infty). \end{aligned}$$

Sei $1 \leq q \leq \infty$, X Banachraum. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^q[X', X] &:= \{ f: T \rightarrow X' : \forall x \in X: \langle x, f \rangle \in L^q \text{ und } (q < \infty) \int_T \|f\|^q d\lambda < \infty \\ &\quad \text{bzw. } (q = \infty) f \text{ f.ü. beschränkt} \}, \end{aligned}$$

versehen mit der Halbnorm

$$N_q(f) := \left(\int_T \|f\|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \quad (q < \infty), \quad N_\infty(f) := \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in T} \|f(\theta)\|.$$

$\mathcal{N}^q[X', X] := \{ f \in \mathcal{L}^q[X', X] : f \sim_X 0 \}$ ist abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}^q[X', X]$. Es sei $L^q[X', X] := \mathcal{L}^q[X', X] / \mathcal{N}^q[X', X]$, versehen mit der Quotientennorm $\|\varphi\|_q := \inf_{f \in \varphi} N_q(f)$.

Achtung: Bei der Definition von $L^q(X', X)$ aus $\mathcal{L}^q(X', X)$ in (0.5) 2° wurde auch nach dem Teilraum $\{f \sim_X 0\}$ ausreduziert. Dieser war dort einfach der Nullraum der Halbnorm auf $\mathcal{L}^q(X', X)$, weshalb man dort das $\inf$ bei der Definition von $\|\varphi\|_q$ ($\varphi \in L^q(X', X)$) weglassen konnte (und weshalb ich schon die Halbnorm auf $\mathcal{L}^q(X', X)$ mit $\|\cdot\|_q$ bezeichnete). Im Gegensatz dazu ist hier i.a. $\mathcal{N}^q[X', X] \neq N_q^{-1}(0) = \{f \in \mathcal{L}^q[X', X] : f = 0 \text{ f.ü.}\}$, wie das Beispiel $f: T \rightarrow l^2(T)$, $f(t) := e_t$ zeigt.

Man hat sich nun, analog zu (0.5) 5° zu überlegen, daß für $f \in L^p(X)$, $g \in L^q[X', X]$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ $\langle f, g \rangle \in L^1$ wohldefiniert ist mit $\|\langle f, g \rangle\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Die erwähnte bekannte Darstellung von $L^p(X)$ lautet nun:

(0.6)' Satz: Sei X Banachraum, $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Abbildung $L^q[X', X] \rightarrow L^p(X)$, $g \mapsto G$, wobei $Gf := \langle f, g \rangle := \int_T \langle f, g \rangle d\lambda$ ($f \in L^p(X)$), ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: [IT VII thm. 7 cor., thm. 9 cor.]

(0.7) Äquivalenz der Darstellungen (0.6) und (0.6)'

In diesem Abschnitt bezeichne ich die Halbnorm auf $\mathcal{L}^q(X', X)$ mit n_q .

1° Sei zunächst $1 \leq q \leq \infty$.

Behauptung: $\mathcal{L}^q[X', X] \subset \mathcal{L}^q(X', X)$ und für $f \in \mathcal{L}^q[X', X]$: $n_q(f) \leq N_q(f)$.

Beweis: $f \in \mathcal{L}^q[X', X] \Rightarrow \exists F \in L^q: \|f\| \leq F$ f.ü.

$$\Rightarrow \forall x \in B_X: |\langle x, f \rangle| \leq F \in L^q$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^q(X', X) \text{ und } v_f \leq F$$

$$\Rightarrow n_q(f) = \|v_f\|_q \leq \|F\|_q$$

$$\Rightarrow n_q(f) \leq \inf_{F \in L^q} \|F\|_q = N_q(f), \text{ q.e.d.}$$

$$F \geq \|f\| \text{ f.ü.}$$

Achtung: I.a. ist $\mathcal{L}^q[X', X] \subsetneq \mathcal{L}^q(X', X)$. Sei z.B. $f: T = (0, 2\pi] \rightarrow l^2(T)$,

$$f(t) := \frac{1}{t} e_t. \text{ Es ist } f \sim 0, \text{ also } f \in \mathcal{L}^q(X', X) \forall q \text{ (und } n_q(f) = 0), \text{ aber}$$

$$\|f(t)\| = \frac{1}{t} \text{ hat keine } L^q\text{-Majorante } \forall q \in [1, \infty]. \text{ Da\ss auch die Ungleichung}$$

$$\text{strikt sein kann, zeigt wieder das Beispiel } f(t) := e_t \in l^2(T).$$

2° Sei nun $1 < q \leq \infty$.

Behauptung: Die Inklusion $\mathcal{L}^q[X', X] \hookrightarrow \mathcal{L}^q(X', X)$ induziert einen isometrischen Isomorphismus $L^q[X', X] \xrightarrow{I} L^q(X', X)$.

Beweis: Wohldefiniertheit und Injektivität sind klar. Ich bezeichne die Restklassenbildung in $\mathcal{L}^q[X', X]$ bzw. $\mathcal{L}^q(X', X)$ mit $[\cdot]$ bzw. $(\cdot)$.

$$\text{Sei } f \in \mathcal{L}^q[X', X] \Rightarrow \|I[f]\|_q = \|(f)\|_q = \inf_{g \in n_q^{-1}(0)} n_q(f+g) \leq \inf_{1^\circ g \in M^q[X', X]} N_q(f+g) =$$

$$= \| [f] \|_q, \text{ also ist } I \text{ stetig und } \|I\| \leq 1.$$

Surjektivität und andere Ungleichung:

Sei $(h) \in L^q(X', X)$. Nach Lemma (0.5) 5° c) wirkt (h) als $H \in L^p(X)'$,

$$Hf := \int \langle f, h \rangle d\lambda \text{ mit } \|H\| \leq \|(h)\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

H wird gemäß Satz (0.6)' dargestellt durch $[g] \in L^q[X', X]$ mit

$$\|[g]\|_q = \|H\| \leq \|(h)\|_q. \text{ Es folgt } \int \langle f, g \rangle d\lambda = \int \langle f, h \rangle d\lambda \quad \forall f \in L^p(X).$$

Setzt man speziell $f = f_0 \cdot x$ ($f_0 \in L^p$, $x \in X$), so folgt

$$\langle x, g \rangle = \langle x, h \rangle \text{ in } L^q = L^p \quad \forall x \in X, \text{ d.h. } g \sim_x h, \text{ d.h. } I[g] = (h), \text{ q.e.d.}$$

(0.8) Die Räume $L_Y^q(X', X)$

Sei X Banachraum, $Y \subset X'$ Unterbanachraum, $1 \leq q \leq \infty$.

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ Es sei } L_Y^q(X', X) &:= \{f \in L^q(X', X) : (G) \int_E f d\lambda \in Y \ \forall E \in \Sigma\} \\ &= \{f \in L^q(X', X) : (G) \int_T f d\lambda \in Y \ \forall G \in L^p\} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt daraus, daß die Treppenfunktionen dicht in L^p liegen und die Abbildung $L^p \rightarrow X'$, $g \mapsto (G) \int_T g f d\lambda$ ($f \in L^q(X', X)$ fest) stetig ist ((0.5)5°a) und b)).

$L_Y^q(X', X)$ ist abgeschlossener Untervektorraum von $L^q(X', X)$, da die Abbildung $L^q(X', X) \rightarrow X'$, $f \mapsto (G) \int_E f d\lambda$ ($E \in \Sigma$ fest) stetig ist ((0.5)5°a)).

Unter der kanonischen Inklusion (0.5)4°a) $L^q(X') \subset L^q(X', X)$

landet trivialerweise $L^q(Y)$ in $L_Y^q(X', X)$, d.h. $L^q(Y) \subset L_Y^q(X', X)$ ist abgeschlossener Teilraum.

Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $L_Y^q(X', X) \subset L_Y^p(X', X)$ (stetige Inklusion mit Norm ≤ 1), da dies für $Y = X'$ der Fall ist ((0.5)2°).

2° Lemma: Sei $f \in L_Y^1(X', X)$ und $\mu: \Sigma \rightarrow Y$, $\mu(E) := (G) \int_E f d\lambda$ (kurz: $d\mu = f d\lambda$).

Dann ist $\mu \in M(Y)$ und $|\mu|(E) = \int_E v_f d\lambda \ \forall E \in \Sigma$.

Insbesondere $\|\mu\| = \|f\|_1$, d.h. $L_Y^1(X', X) \rightarrow M(Y)$, $f \mapsto f d\lambda$ ist Isometrie.

Beweis: Aus der Abschätzung $\|\mu(A)\| \leq \int_A v_f d\lambda \ \forall A \in \Sigma$ ((0.5)5°a)) folgt sofort $|\mu|(E) \leq \int_E v_f d\lambda \ \forall E \in \Sigma$ und daraus $\mu \in M(Y)$.

Es bleibt zu zeigen: $\int_E v_f d\lambda \leq |\mu|(E) \ \forall E \in \Sigma$.

Trivialerweise ist $\mu \ll \lambda \Rightarrow |\mu| \ll \lambda \Rightarrow \exists \varphi \in L_+^1(\lambda) : |\mu|(E) = \int_E \varphi d\lambda \ \forall E \in \Sigma$

(Radon-Nikodým). Ich zeige $v_f \leq \varphi$ f.ü.:

Sei $x \in B_{X'}$. Offenbar ist $\langle x, d\mu \rangle = \langle x, f \rangle d\lambda$, woraus bekanntlich

$|\langle x, d\mu \rangle| = |\langle x, f \rangle| d\lambda$ folgt. Nun:

$$\int_E |\langle x, f \rangle| d\lambda = |\langle x, \mu \rangle|(E) \leq |\mu|(E) = \int_E \varphi d\lambda \ \forall E \in \Sigma$$

$\Rightarrow |\langle x, f \rangle| \leq \varphi$ f.ü., d.h. in L^1 . Dies $\forall x \in B_{X'}$

$\Rightarrow v_f \leq \varphi$ in L^1 , d.h. f.ü., nach Definition von v_f , q.e.d.

3°Corollar: Sei $f \in L^1(X', X) \Rightarrow$

$$\|f\|_1 = \sup_{\substack{g \in C(X) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \int_T \langle g, f \rangle d\lambda = \sup_{\substack{g \in L^\infty(X) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \int_T \langle g, f \rangle d\lambda,$$

insbesondere $L^1(X', X) \subset L^\infty(X)'$ isometrisch.

Beweis: Sei $d\mu = fd\lambda$ wie im Lemma. Ich zeige zunächst, daß

$$\int_T \langle g, d\mu \rangle = \int_T \langle g, f \rangle d\lambda \quad \forall g \in C(X) \text{ ist. Dies ist eine triviale Rechnung}$$

für Treppenfunktionen g . Approximiere $g \in C(X)$ gleichmäßig durch Treppenfunktionen $g_n \Rightarrow$

$$\int_T \langle g, d\mu \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \langle g_n, d\mu \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \langle g_n, f \rangle d\lambda = \int_T \langle g, f \rangle d\lambda$$

wegen (0.4)2°, (0.5)5°c).

Nun ist nach dem Lemma 2°, dem Satz von Singer (0.4)3° und (0.5)5°c)

$$\|f\|_1 = \|\mu\| = \sup_{\substack{g \in C(X) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \left| \int_T \langle g, d\mu \rangle \right| = \sup_{\substack{g \in C(X) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \left| \int_T \langle g, f \rangle d\lambda \right| \leq \sup_{\substack{g \in L^\infty(X) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \left| \int_T \langle g, f \rangle d\lambda \right| \leq \|f\|_1,$$

q.e.d.

4°Satz: Das Bild der Isometrie (2°) $L_Y^1(X', X) \rightarrow M(Y)$, $f \mapsto fd\lambda$,

ist $M_C(Y) := \{\mu \in M(Y) : \mu \ll \lambda\}$.

(Insbesondere ist $L_Y^1(X', X)$ Banachraum.)

Beweis: Es ist zu zeigen: $\mu \in M_C(Y) \Rightarrow \exists f \in L_Y^1(X', X) : d\mu = fd\lambda$.

O.B.d.A. $Y = X'$. Der Satz folgt dann aus dem "verallgemeinerten Satz von Lebesgue-Nikodým" [Di §13 thm. 5].

Anmerkung: Man kann den Satz aus dem Darstellungssatz (0.6)

$L^1(X)' = L^\infty(X', X)$ ableiten. Umgekehrt kann man ihn aber auch benutzen, um (die Surjektivität in) (0.6) zu zeigen [Di §13 thm.8]. Die beiden Sätze sind also im wesentlichen "äquivalent".

§1: Vektorwertige h^p -Funktionen

Dieser Paragraph hat im wesentlichen vorbereitenden Charakter für §2, in dem mit dem eigentlichen Thema der Arbeit, dem Studium der vektorwertigen H^p -Funktionen, begonnen wird. H^p -Funktionen sind genau die holomorphen h^p -Funktionen. Bei vielen Aussagen über H^p -Funktionen braucht man aber die Holomorphie einfach nicht, sodaß es sinnvoll erscheint, denjenigen Teil der Theorie, der nur die Harmonizität benötigt, voranzustellen.

Nach Definition der Räume $h^p(Y)$ (1.4) zeige ich zunächst, daß das Poisson-Integral einen isometrischen Isomorphismus vermittelt zwischen $M(Y)$ und $h^1(Y)$ sowie zwischen $L^p_Y(X', X)$ und $h^p(Y)$ ($1 < p \leq \infty$) (1.5). Die Beweisidee findet sich in den alten Arbeiten von Ryan [64], [65]. Um das Randverhalten von $h^1(Y)$ -Funktionen zu studieren, muß man also vektorwertige Poisson-Stieltjes-Integrale untersuchen. Es zeigt sich, daß wie im skalaren Fall die Existenz von $\mu'(\theta)$ die des Winkelgrenzwerts von $P[d\mu]$ in $e^{i\theta}$ impliziert (1.7). Insbesondere hat das Poisson-Integral einer $L^p(Y)$ -Funktion f.ü. nichttangente Limiten. Der vektorwertige Satz von Hardy-Littlewood (1.10) erlaubt einen einfachen Beweis der Umkehrung ($1 < p \leq \infty$) sowie der Konvergenz im p -ten Mittel ($1 \leq p < \infty$) (1.11). Diese Aussagen stammen von Bukhvalov und Danilevich ([15], [16]), wie auch der im folgenden studierte Zusammenhang zur Radon-Nikodým-Eigenschaft (RNP) (1.12): Genau dann hat Y die RNP, wenn alle $f \in h^p(Y)$ f.ü. einen radialen Limes haben, $1 < p < \infty$ fest. Dies gilt auch für $p = \infty$, und aus der zu Beginn durchgeführten Untersuchung von Poisson-Stieltjes-Integralen (oder der Lebesgue-Zerlegung von Vektormaßen) folgt, daß man auch $p = 1$ zulassen kann.

Bzgl. schwacher Limiten gilt (1.13): Hat $f \in h^1(Y)$ f.ü. schwache radiale Limiten, so auch f.ü. starke Winkelgrenzwerte. Dagegen hat für separables X jedes $f \in h^1(X')$ f.ü. schwach*-Winkelgrenzwerte (1.15). Abschließend zeige ich noch einen Satz über nichttangente Limiten von operatorwertigen h^1 -Funktionen (1.16).

Außer den schon erwähnten Autoren haben auch Grossetête ([33], [34]), Heins [39] und Egghe [27] vektorwertige h^p -Funktionen untersucht, erstere mit Werten in lokalkonvexen Räumen.

Die folgende Definition ist grundlegend:

(1.1) Definition - Lemma: Sei $\mu \in M(X)$.

$\hat{\mu}(n) := \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$) ist der n . Fourierkoeffizient von μ .

$$\text{Sei } P_r(t) := \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \quad (r < 1, t \in \mathbb{R})$$

der Poissonkern, dann heißt

$$P[d\mu]: D \rightarrow X, \quad P[d\mu](re^{i\theta}) := \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) \quad (re^{i\theta} \in D)$$

das Poisson-Integral von μ .

Es gilt: $P[d\mu](re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$; die Reihe konvergiert

absolut und gleichmäßig in $|z| = r < R \quad \forall R < 1$.

Beweis: Da $\|\mu(n)\| \leq \|\mu\|(T) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, ist die Aussage über die Konvergenz der Reihe trivial.

$$\text{Es gilt } P[d\mu](re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} d\mu(t) =$$

Da die Reihe unter dem Integral gleichmäßig in t konvergiert und μ beschränkte Variation hat, kann man trivialerweise Integral und Summe vertauschen und erhält

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \text{ q.e.d.}$$

Da nach (0.8)2° für $\varphi \in L^1(X', X)$ das Vektormaß $d\mu = \varphi d\lambda$ beschränkte Variation hat, erhält man insbesondere:

(1.2) Definition - Lemma: Sei $\varphi \in L^1(X', X)$.

$\hat{\varphi}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \varphi(t) dt$ ($n \in \mathbb{Z}$) ist der n . Fourierkoeffizient von φ .

$$P[\varphi]: D \rightarrow X', \quad P[\varphi](re^{i\theta}) := (G) \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) \varphi(t) \frac{dt}{2\pi}$$

ist das Poisson-Integral von φ .

Es gilt: $P[\varphi](re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$ mit absolut und gleichmäßig

konvergenter Reihe in $RD \quad \forall R < 1$.

Beweis: Sei $d\mu := \varphi d\lambda = \varphi \frac{dt}{2\pi} \Rightarrow \hat{\varphi}(n) = \hat{\mu}(n)$ und $P[\varphi] = P[d\mu]$,

die Behauptung ist also ein Spezialfall von (1.1).

(1.3) Vektorwertige harmonische Funktionen

Es ist wohlbekannt [HP III.2], daß schwach (oder schwach*) holomorphe Funktionen $f:D \rightarrow X$ (oder $f:D \rightarrow X'$) holomorph sind und durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Das Analogon für "harmonisch" statt "holomorph" scheint weniger bekannt zu sein. Ich bringe einen bequemen Beweis.

Definition - Satz: Sei $f:D \rightarrow Y$. Es sind äquivalent:

- 1° f ist harmonisch, d.h. 2 mal stetig differenzierbar und $\Delta f = 0$.
- 2° f ist schwach harmonisch, d.h. $\langle f, y' \rangle : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist harmonisch $\forall y' \in Y'$.
- 3° (Falls $Y = X'$) f ist schwach* harmonisch, d.h. $\langle x, f \rangle : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist harmonisch $\forall x \in X$.

4° $\exists a_n \in Y$ ($n \in \mathbb{Z}$) so daß $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ mit absolut und kompakt konvergenter Reihe in D .

Beweis: Gilt 4°, so ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \bar{z}^n$ die Summe einer

holomorphen und einer antiholomorphen Funktion, sodaß 1° klar ist.

Für den Rest des Satzes genügt es offenbar, $Y = X'$ anzunehmen und

3° $\Rightarrow$ 4° zu beweisen.

Sei also $f:D \rightarrow X'$ schwach* harmonisch. Für $R < 1$ fest sei

$f_R(z) := f(Rz)$, $|z| < \frac{1}{R}$. Sei $\varphi_R := f_R|T$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist φ_R beschränkt, also $\varphi_R \in L^\infty(X', X)$.

f_R ist natürlich auch schwach* harmonisch; nach der skalaren Poisson-Integralformel und Lemma (1.2) ist also in D

$f_R(re^{i\theta}) = P[\varphi_R](re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_R(n) r^{|n|} e^{in\theta}$ mit absolut und kompakt konvergenter Reihe in D .

M.a.W. ($\rho = Rr$): In $\rho < R$ ist $f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}_R(n)}{R^{|n|}} |\rho| e^{in\theta}$

mit absolut und kompakt konvergenter Reihe in RD .

Sei $a_R(n) := \frac{\hat{\varphi}_R(n)}{R^{|n|}} \Rightarrow$ in $|z| < R$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_R(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_R(n) \bar{z}^n$

$\Rightarrow f$ ist in $|z| < R$ ∞ oft differenzierbar und

$$a_R(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0) & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{|n|!} \frac{\partial^{|n|} f}{\partial \bar{z}^{|n|}} & \text{für } n < 0 \end{array} \right\} =: a_n.$$

Da $R < 1$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Ich komme nun zur Definition der $h^p(Y)$ -Räume.

(1.4) Definition: Sei Y Banachraum.

Für $f: D \rightarrow Y$ und $0 \leq r < 1$ sei $f_r: T \rightarrow Y$, $f_r(e^{it}) := f(re^{it})$.

Für $f: D \rightarrow Y$ harmonisch und $1 \leq p \leq \infty$ sei $\|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p$.

$h^p(Y) := \{f: D \rightarrow Y \text{ harmonisch} : \|f\|_p < \infty\}$.

Bemerkungen: 1° Sei $f: D \rightarrow Y$ harmonisch, $1 \leq p < \infty$. Dann ist

$\|f(\cdot)\|^p$ subharmonisch. Dies folgt sofort aus der Darstellung

$\|f\|^p = \sup_{Y' \in B_Y} |\langle f, Y' \rangle|^p$ und der entsprechenden skalaren Aussage.

Man kann auch den skalaren Beweis [Du 1.3 ex. 2] kopieren, da f die Mittelwerteigenschaft hat.

2° Sei $f: D \rightarrow Y$ harmonisch. Aus 1° und [Du thm. 1.6] folgt, daß für

$1 \leq p < \infty$ $\|f_r\|_p$ monoton steigt bzgl. r ; es ist also auch

$$\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_p.$$

Beides gilt auch für $p = \infty$, denn aus der Poissonschen Integralformel folgt sofort, daß für $|z| < R < 1$ $\|f(z)\| \leq \|f_r\|_\infty$ ist.

Außerdem ist trivialerweise $\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} \|f(z)\|$, also $h^\infty(Y)$ der Raum

der beschränkten Y -wertigen harmonischen Funktionen.

3° Es ist klar, daß $h^p(Y)$ mit $\|\cdot\|_p$ normierter Raum ist und

$\|f\|_p \leq \|f\|_q$ für $f: D \rightarrow Y$ harmonisch, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, also hat man

$h^q(Y) \subset h^p(Y)$ mit stetiger Inklusion für $p \leq q$.

Darauf wird im folgenden nicht mehr hingewiesen.

4° $h^p(Y)$ ist Banachraum: Sei (f_n) Cauchyfolge in $h^p(Y)$. Die

Poisson-Integralformel für den Kreis mit Radius R liefert für

$$|z| \leq r < R < 1:$$

$$\begin{aligned} \|f_n(z) - f_m(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} \|f_n(Re^{it}) - f_m(Re^{it})\| dt \\ &\leq \frac{1}{(R-r)^2} \|f_{n,R} - f_{m,R}\|_1 \\ 2^\circ \quad &\leq \frac{1}{(R-r)^2} \|f_n - f_m\|_1 \\ 3^\circ \quad &\leq \frac{1}{(R-r)^2} \|f_n - f_m\|_p, \end{aligned}$$

so daß (f_n) kompakt in D gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.

Diese ist harmonisch wegen Satz (1.3). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow$

$$\exists m \forall n \geq m: \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon.$$

$$\text{Für alle } r < 1: \|f_r - f_{m,r}\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n,r} - f_{m,r}\|_p$$

(gleichmäßige Konvergenz auf der Kreislinie vom Radius r)

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow (\sup_{r < 1} \text{links}) \|f - f_m\|_p \leq \varepsilon, \text{ so daß } f \in h^p(Y) \text{ und } f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m \text{ in } h^p(Y).$$

Natürlich könnte man die Vollständigkeit auch aus dem nächsten Satz folgern, der $h^p(Y)$ als isomorph zu einem Banachraum nachweist (ohne die Vollständigkeit zu verwenden). Obiger Beweis hat aber neben seiner Natürlichkeit den Vorteil, daß man noch ablesen kann:
 $\underline{5^\circ}$ Gilt $f_n \rightarrow f$ in $h^p(Y)$, so konvergieren die f_n kompakt in D gegen f .
 Insbesondere: Die Punktauswertungen $z: h^p(Y) \rightarrow Y, f \mapsto f(z) \ (z \in D)$ sind stetig.

Den folgenden Satz kann man vielleicht als endgültige Fassung der Ergebnisse von Grossetête [33 §1] und Bukhvalov [15 thm. 2.3] bezeichnen. Ich nehme immer $Y \subset X'$ Unterbanachraum an für einen Banachraum X . Dies ist natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man ja $X := Y'$ setzen kann. Der Grund für mein Vorgehen ist folgender: Es wird sich zeigen, daß (für $p > 1$) $h^p(Y)$ -Funktionen Poisson-Integrale von $L^p(X', X)$ -Funktionen sind, würde man stets $X := Y'$ setzen, also von $L^p(Y'', Y')$ -Funktionen. Ist nun aber zufällig Y ein Dual X' , so erhielte man dadurch nur $Y'' = X'''$ -wertige

Funktionen, während man bei meinem Verfahren automatisch $Y = X'$ -wertige Funktionen bekommt. Man kann dadurch also den allgemeinen und den Fall eines Dualraums simultan behandeln. Den gleichen Zweck erreicht übrigens Bukhvalov in [15] durch seine Räume $s(X^*)-L^p(X^{**})$, X^* ein normierender Unterbanachraum von X' (wobei ich der Konsistenz der Notation in dieser Arbeit wegen die Bedeutung von $'$ und $*$ vertauscht habe).

(1.5) Satz: Sei $Y \subset X'$. Das Poisson-Integral definiert einen isometrischen Isomorphismus

$$1^\circ \quad (p = 1) \quad P: M(Y) \rightarrow h^1(Y), \quad \mu \mapsto P[d\mu]$$

$$2^\circ \quad (1 < p \leq \infty) \quad P: L_Y^p(X', X) \rightarrow h^p(Y), \quad \varphi \mapsto P[\varphi].$$

Bezeichnung: Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $\mathcal{H}^p(Y)$ das Bild von $L^p(Y)$ unter P . Die $\mathcal{H}^p(Y)$ sind Unterbanachräume von $h^p(Y)$ und $\mathcal{H}^q(Y) \subset \mathcal{H}^p(Y)$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Zur Entlastung des Beweises folgendes

Lemma: 1° Sei $Y \subset Z$ eine Inklusion von Banachräumen und $\mu \in M(Z)$.

Dann sind äquivalent:

$$a) \quad \mu \in M(Y) \quad b) \quad \hat{\mu}(n) \in Y \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad c) \quad P[d\mu]: D \rightarrow Y$$

2° Sei $Y \subset X'$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\varphi \in L^p(X', X)$. Dann sind äquivalent:

$$a) \quad \varphi \in L_Y^p(X', X) \quad b) \quad \hat{\varphi}(n) \in Y \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad c) \quad P[\varphi]: D \rightarrow Y$$

Beweis des Lemmas: $1^\circ \quad a) \Rightarrow b) \& c)$ ist trivial.

$$c) \Rightarrow b): \text{ Nach Lemma (1.1) ist } P[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(-n) \bar{z}^n$$

also $\hat{\mu}(n)$ durch $|n|$ -malige Differentiation nach z bzw. $\bar{z}$ in 0 zu bestimmen (vgl. Beweis von Satz (1.3)), woraus die Behauptung folgt.

$b) \Rightarrow a)$: Nach Voraussetzung $\int_T h d\mu \in Y$ für jedes trigonometrische Polynom h . Diese liegen dicht in C (Weierstraß), also ist

$\int_T h d\mu \in Y \quad \forall h \in C$ (da ja $C \rightarrow \mathbb{C}$, $h \mapsto \int_T h d\mu$ stetig ist). C liegt dicht in

$L^1(|\mu|)$ [B Cor. 43.6] $\Rightarrow \int_T h d\mu \in Y \forall h \in L^1(|\mu|)$ (da ja $L^1(|\mu|) \rightarrow Z$, $h \mapsto \int h d\mu$ stetig ist). $h := \chi_E$, $E \in \Sigma$, liefert die Behauptung.

2° folgt aus 1°: Setze $Z := X'$, $d\mu := \varphi d\lambda \in M(X')$ nach (0.8) 2°.

$\varphi \in L^p_Y(X', X)$ heißt nach Definition (0.8) 1° $\int_E \varphi d\lambda = \mu(E) \in Y \forall E \in \Sigma$,

d.h. $\mu \in M(Y)$. Also ist 1°a) $\Leftrightarrow$ 2°a), und wegen $\hat{\mu}(n) = \hat{\varphi}(n)$ und

$P[d\mu] = P[\varphi]$ auch 1°b) $\Leftrightarrow$ 2°b), 1°c) $\Leftrightarrow$ 2°c).

Beweis des Satzes: 1° Sei $\mu \in M(Y)$ und $f := P[d\mu]$. Nach Lemma (1.1) (und Satz (1.3)) ist f harmonisch.

$$\begin{aligned} \text{Für } r < 1: \quad & \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) d|\mu|(t) \frac{d\theta}{2\pi} = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) \frac{d\theta}{2\pi} d|\mu|(t) = |\mu|(T) = \|\mu\|, \end{aligned}$$

also $f \in h^1(Y)$ und $\|f\|_1 \leq \|\mu\|$.

Umgekehrt: Sei $f \in h^1(Y)$ Setze $\mu_r := f_r d\lambda$ ($r < 1$), wobei wie immer $f_r(e^{it}) := f(re^{it})$. Dann ist $\mu_r \in M(Y) \subset M(X')$ und $\|\mu_r\| = \|f_r\|_1 \leq \|f\|_1$.

Nach dem Satz von Singer (0.4) 3° ist $M(X') = C(X)'$ unter der dualen Paarung $\langle h, m \rangle := \int_T \langle h, dm \rangle$. Nach Banach-Alaoglu gibt es

$\mu \in M(X')$, $\|\mu\| \leq \|f\|_1$, so daß μ Häufungspunkt des Netzes $(\mu_r)_{r < 1}$ bzgl. $\sigma(M(X'), C(X))$ ist.

Behauptung: $f = P[d\mu]$.

Beweis: Sei $x \in X$ und $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in D$ fest.

$e^{it} \mapsto P_{r_0}(\theta-t)x$ ist in $C(X)$

$\Rightarrow \langle x, P[d\mu](z_0) \rangle = \int_0^{2\pi} \langle P_{r_0}(\theta-t)x, d\mu(t) \rangle$ ist Häufungspunkt ($r \rightarrow 1$) von

$$\int_0^{2\pi} \langle P_{r_0}(\theta-t)x, d\mu_r(t) \rangle = \langle x, \int_0^{2\pi} P_{r_0}(\theta-t) f_r(e^{it}) d\lambda(t) \rangle =$$

$$= \langle x, f_r(z_0) \rangle = \langle x, f(rz_0) \rangle \xrightarrow{r \rightarrow 1} \langle x, f(z_0) \rangle$$

$\Rightarrow \langle x, P[d\mu](z_0) \rangle = \langle x, f(z_0) \rangle \forall x \in X \forall z_0 \in D$, q.e.d.

Weiter: Aus dem Lemma (1°) folgt $\mu \in M(Y)$.

Bleibt zu zeigen: P ist injektiv. Sei $\mu \in M(Y)$ mit $P[d\mu] = 0$.

Das Lemma (1°), angewandt auf die Banachrauminklusion $\{0\} \subset Y$,

liefert $\mu = 0$, q.e.d.

2° Sei $\varphi \in L^p_V(X', X)$. Nach dem Lemma (2°) geht $f := P[\varphi]: D \rightarrow Y$ und ist harmonisch nach Lemma (1.2) (und Satz (1.3)). Ich zeige

$\|f\|_p \leq \|\varphi\|_p$: Dies ist evident für $p = \infty$ wegen

$$\|f(re^{i\theta})\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) \varphi(t) dt \right\| \stackrel{(0.5) 5^\circ}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) dt \|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty.$$

Sei nun $1 < p < \infty$ und $r < 1$. Sei $v_\varphi := L^p\text{-sup}_{\|x\| \leq 1} \langle x, \varphi \rangle$ wie in (0.5) 2°,

so daß also $v_\varphi \in L^p$ und $\|v_\varphi\|_p = \|\varphi\|_p$.

$$\text{Es ist } \|f(re^{i\theta})\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) \underbrace{|\langle x, \varphi(t) \rangle|}_{\leq v_\varphi(t) \text{ f.ü.}} \frac{dt}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) v_\varphi(t) \frac{dt}{2\pi},$$

also nach der Jensenschen Ungleichung [R thm. 3.3], angewandt auf das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_r(\theta-t) \frac{dt}{2\pi}$:

$$\|f(re^{i\theta})\|_p^p \leq \left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) v_\varphi(t) \frac{dt}{2\pi} \right)^p \leq \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) v_\varphi(t)^p \frac{dt}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|f_r\|_p^p &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) v_\varphi(t)^p \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) \frac{d\theta}{2\pi} v_\varphi(t)^p \frac{dt}{2\pi} = \|v_\varphi\|_p^p = \|\varphi\|_p^p, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $f \in h^p(Y)$, $f_r(e^{it})$ wie immer und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt

$f_r \in L^p(Y) \subset L^p(X') \subset L^p(X', X)$ und $\|f_r\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall r < 1$. Nach (0.6)

ist $L^p(X', X) = L^q(X)'$ unter der dualen Paarung $\langle h, \psi \rangle := \int_T \langle h, \psi \rangle d\lambda$

($h \in L^q(X)$, $\psi \in L^p(X', X)$). Nach Banach-Alaoglu gibt es $\varphi \in L^p(X', X)$,

$\|\varphi\|_p \leq \|f\|_p$, so daß φ Häufungspunkt des Netzes $(f_r)_{r < 1}$ bzgl.

$\sigma(L^p(X', X), L^q(X))$ ist.

Behauptung: $f = P[\varphi]$.

Beweis: Sei $x \in X$ und $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in D$ fest.

$t \mapsto P_{r_0}(\theta-t)x$ ist in $L^q(X) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle x, P[\varphi](z_0) \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle P_{r_0}(\theta-t)x, \varphi(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} \text{ ist Häufungspunkt } (r \rightarrow 1) \text{ von} \\ \int_0^{2\pi} \langle P_{r_0}(\theta-t)x, f_r(e^{it}) \rangle \frac{dt}{2\pi} &= \langle x, f_r(r_0 e^{i\theta}) \rangle = \langle x, f(rz_0) \rangle \xrightarrow{r \rightarrow 1} \langle x, f(z_0) \rangle \\ \Rightarrow \langle x, P[\varphi](z_0) \rangle &= \langle x, f(z_0) \rangle \quad \forall x \in X \quad \forall z_0 \in D, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Weiter: Aus dem Lemma (2°) folgt, daß $\varphi \in L_Y^p(X', X)$.

$P: L_Y^p(X', X) \longrightarrow h^p(Y)$ ist injektiv, da es ja auf dem größeren Raum $M(Y)$ injektiv ist. Q.e.d.

Bemerkung: Sei $f \in h^p(Y)$. Aus dem Beweis folgt, daß μ bzw. φ der einzige schwach*-Häufungspunkt von $(f_r d\lambda)_{r < 1}$ bzw. $(f_r)_{r < 1}$ ist, denn jeder Häufungspunkt stellt f mittels Poisson-Integral dar (im Beweis wurde nichts weiter verwendet). Da das Netz beschränkt ist, folgt:

$$\begin{aligned} (p=1) \quad d\mu &= \lim_{r \rightarrow 1} f_r d\lambda \quad \sigma(M(Y), C(X)) \\ (1 < p \leq \infty) \quad \varphi &= \lim_{r \rightarrow 1} f_r \quad \sigma(L_Y^p(X', X), L^q(X)). \end{aligned}$$

Im Fall $p=1$ kann man noch folgenden Spezialfall betrachten.

Sei $f = P[\varphi]$, $\varphi \in L_Y^1(X', X)$ ($\subset M(Y)$ nach (0.8) 2°). Gilt dann sogar $\varphi = \lim_{r \rightarrow 1} f_r$ bzgl. $\sigma(L^1(X', X), L^\infty(X))$? Dies wird von Bukhvalov [15 thm. 2.1 2)] behauptet. Ich kann das nicht zeigen, werde es aber im nächsten Paragraphen als Anwendung des Hardy-Littlewood-Maximaltheorems im Spezialfall eines analytischen φ (d.h. f) beweisen (2.6). In jedem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \varphi \rangle &= \lim_{r \rightarrow 1} \langle \psi, f_r \rangle \text{ für jede Treppenfunktion } \psi \\ (\text{die Crux ist natürlich, daß die Treppenfunktionen i.a. nicht dicht in } L^\infty(X) \text{ sind}). \text{ Denn sei } \psi &= \psi_0 x \text{ mit } \psi_0 \in L^\infty, x \in X \Rightarrow \\ \langle \psi, f_r \rangle &= \int_T \psi_0 \langle x, f_r \rangle d\lambda \xrightarrow{r \rightarrow 1} \int_T \psi_0 \langle x, \varphi \rangle d\lambda = \langle \psi, \varphi \rangle, \\ \text{denn } \langle x, f \rangle &= P[\langle x, \varphi \rangle], \text{ und nach skalarer Theorie konvergieren die} \\ \langle x, f_r \rangle &\text{ sogar stark in } L^1 \text{ gegen } \langle x, \varphi \rangle \text{ [Ko p.12]}. \end{aligned}$$

(1.6)

Um das Randverhalten von $h^1(Y)$ -Funktionen zu untersuchen, muß man also nach dem letzten Satz genau die Poisson-Integrale $P[dm]$, $m \in M(Y)$, betrachten. Dies geschieht aus rechnerischen Gründen (partielle Integration) wie im klassischen Fall dadurch, daß man $P[dm]$ durch ein Poisson-Stieltjes-Integral $P[d\mu]$ ersetzt, $\mu: [-\pi, \pi] \rightarrow Y$ von beschränkter Variation. Dazu einige Vorbemerkungen.

Sei $m \in M(Y)$. m kann man natürlich mit einem Vektormaß von beschränkter Variation auf $(-\pi, \pi]$ (oder auf $[0, 2\pi)$, wie schon dauernd geschehen) identifizieren, und setzt man $m\{-\pi\} := 0$, auch mit einem auf $[-\pi, \pi]$.

Sei $a < b$ und m irgendein Y -wertiges Borelmaß von beschränkter Variation auf $[a, b]$. Gemäß [Di §17.3] definiert man die Funktion

$\mu_m: [a, b] \rightarrow Y$ von beschränkter Variation durch

$\mu_m(t) := m[a, t]$ für $t < b$ und $\mu_m(b) := m[a, b]$.

Sind $\mu: [a, b] \rightarrow Y$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ irgendwelche Funktionen, so definiert man (falls existent) die vektorwertigen Riemann-Stieltjes-Integrale

wie üblich so [HP 3.3]*:

$$\int_a^b f d\mu := \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) (\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})) ,$$

$$\int_a^b \mu df := \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\tau_k) (f(t_k) - f(t_{k-1}))$$

(wobei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$).

Es gilt [loc.cit.]: $1^\circ \int_a^b f d\mu$ existiert $\Leftrightarrow \int_a^b \mu df$ existiert,

und in diesem Fall: $\int_a^b f d\mu = - \int_a^b \mu df + [f\mu]_a^b$.

$2^\circ f$ stetig, μ von beschränkter Variation $\Rightarrow \int_a^b f d\mu$ existiert.

Weiter überlegt man sich leicht:

* Man beachte, daß ich unter "von beschränkter Variation" das verstehe, was [HP] unter "von stark beschränkter Variation" verstehen.

3° Ist $\mu = \mu_m$ wie oben, f stetig, so ist $\int_a^b f d\mu = \int_a^b f dm$.

4° f stetig differenzierbar, μ von beschränkter Variation $\Rightarrow$

$\int_a^b f d\mu = \int_a^b \mu(t) f'(t) dt$. Dabei ist das rechte Integral als gewöhnliches

Lebesgue-Bochner-Integral definiert, da μ beschränkt und außerhalb einer abzählbaren Menge stetig [loc.cit.] und damit meßbar ist.

(μ ist in jedem Stetigkeitspunkt gleich dem Limes für $\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$

der Treppenfunktionen $\sum_{k=1}^{n-1} \mu(\tau_k) \chi_{[t_{k-1}, t_k)} + \mu(\tau_n) \chi_{[t_{n-1}, b]}$,

t_k, τ_k wie oben, und dies beweist auch die behauptete Formel.)

(1.7) Nichttangente Limes

Ich benutze im folgenden die Definition in [Ko p. 14]. (Das ist übrigens auch Fatous Definition [28 p. 357]. Sie ist zu der geometrisch anschaulicheren in [Du p. 6] äquivalent.) Danach heißt

$l \in Y$ nichttangentialer Limes von $u: D \rightarrow Y$ in $e^{i\theta_0} \in T : \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0: \lim_{\substack{z = re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0} \\ |\theta - \theta_0| \leq c(1-r)}} u(z) = l. \text{ Bezeichnung: } \nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} u(z) = l.$

Satz: Sei $\mu: [-\pi, \pi] \rightarrow Y$ von beschränkter Variation mit Poisson-

Integral $u := P[d\mu]$, $u(re^{i\theta}) := \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t)$. Sei $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$.

Dann gilt:

1° $\mu'(\theta_0)$ existiert $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} u(z) = 2\pi\mu'(\theta_0)$

2° $D\mu(\theta_0)$ existiert $\Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta_0}) = 2\pi D\mu(\theta_0)$.

Dabei ist $D\mu(\theta_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(\theta_0+h) - \mu(\theta_0-h)}{2h}$ die symmetrische Ableitung von μ in θ_0 .

Notiz: $2\pi\mu'(\theta_0)$ ist die Ableitung von μ bzgl. des normalisierten Maßes λ .

Beweis: Der Beweis folgt [Ko p.15f.]. Zunächst kann man o.B.d.A.

$\theta_0 = 0$ annehmen: Um dies einzusehen, setzt man μ durch die Formel

$\mu(t+2\pi) = \mu(t) + \mu(\pi) - \mu(-\pi)$ auf $\mathbb{R}$ fort. Dann gilt wegen der 2π -

Periodizität des Poissonkerns

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) \quad \left| \begin{array}{l} s=t-\theta \\ t=\theta+s \end{array} \right. \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\theta_0-s) d\tilde{\mu}(s) \quad \text{für } \tilde{\mu}(s) := \mu(\theta_0+s), \end{aligned}$$

und daran kann man die gewünschte Reduktion ablesen.

Es folgt auch (wenn der Satz im Spezialfall $\theta_0 = 0$ bewiesen ist):

Zusatz: Voraussetzungen wie im Satz.

1° Existieren $\mu'(\pm\pi)$ und ist $\mu'(\pi) = \mu'(-\pi) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow -1} u(z) = 2\pi\mu'(\pi)$

2° Existiert $D\mu(\pi) := \frac{\mu(-\pi+h) - \mu(-\pi) + \mu(\pi) - \mu(\pi-h)}{2h}$

$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 1} u(-r) = 2\pi D\mu(\pi).$

(Denn die im Zusatz angegebenen Voraussetzungen besagen ja gerade, daß die fortgesetzte Funktion $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Y}$ in π differenzierbar bzw. symmetrisch differenzierbar ist, sodaß die Reduktion funktioniert.)

Weiter im Beweis des Satzes:

1° Sei also $\theta_0 = 0$. Ö.B.d.A. $\mu(0) = 0$.

Setze $v(t) := \mu(t) - \mu'(0)t \Rightarrow v(0) = 0 = v'(0)$ und

$$P[d\mu] = P[dv] + \underbrace{\mu'(0)P[dt]}_{=2\pi} = P[dv] + 2\pi\mu'(0).$$

Also kann man auch o.B.d.A. $\mu'(0) = 0$ annehmen. Es ist zu zeigen, daß für jedes (feste) $c \geq 0$: $\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ |\theta| \leq c(1-r)}} u(re^{i\theta}) = 0$.

Es genügt zu zeigen: $\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 \leq \theta \leq c(1-r)}} u(re^{i\theta}) = 0$. Denn:

$$u(re^{-i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(-\theta-t) d\mu(t) = - \int_{-\pi}^{\pi} P_r(-\theta+t) d\mu_-(t) = -P[d\mu_-](re^{i\theta}),$$

wobei $\mu_-(t) := \mu(-t)$.

Nun: Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) = [P_r(\theta-t)]_{t=-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt \\ &= o(1) + \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt. \end{aligned}$$

Sei $\delta > 0$ fest $\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt = \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt$$

$$= o(1) + \int_{-\delta}^{\delta} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt,$$

$$\text{denn } P'_r(\theta-t) = -\frac{2r(1-r^2) \sin(\theta-t)}{(1-2r \cos(\theta-t)+r^2)^2} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$$

$$\text{gleichmäßig in } \delta \leq |t| \leq \pi, |\theta| \leq \frac{\delta}{2} \quad (\Rightarrow |\theta-t| \geq \frac{\delta}{2};$$

$$\text{gleichmäßige Stetigkeit von } (r, \theta) \rightarrow P_r(\theta) \text{ in } 0 \leq r \leq 1, \frac{\delta}{2} \leq |\theta| \leq \pi).$$

(Hier brauchte man $\theta \geq 0$ noch nicht. Aber jetzt:)

Für $0 \leq 2\theta \leq \delta$ ist

$$\int_{-\delta}^{\delta} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2r(1-r^2) \sin(t-\theta)}{(1-2r \cos(t-\theta)+r^2)^2} \mu(t) dt$$

$$= \int_{-\delta}^0 + \int_0^{2\theta} + \int_{2\theta}^{\delta} = I + II + III.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ mit $\|\mu(t)\| \leq \epsilon |t|$, $|t| \leq \delta$.

Man schätzt zunächst II ab. Hier (und nur hier) geht die nicht-tangentiale Natur des Grenzübergangs ein: $\theta \leq c(1-r)$ für ein $c \geq 0$.

In II ist $|t-\theta| \leq \theta$. Aus $|\sin x| \leq \theta$ für $|x| \leq \theta$ (und $r \leq 1$, $\cos \leq 1$) folgt

$$\|II\| \leq \int_0^{2\theta} \frac{4\theta}{(1-r)^3} \epsilon t dt = \frac{8\theta^3}{(1-r)^3} \epsilon \leq 8c^3 \epsilon.$$

Zu III: Für $2\theta \leq t \leq \delta$ ist $\|\mu(t)\| \leq \epsilon t \leq \epsilon 2(t-\theta) \Rightarrow$

$$\|III\| \leq 2\epsilon \int_{2\theta}^{\delta} \frac{2r(1-r^2) \sin(t-\theta)}{(1-2r \cos(t-\theta)+r^2)^2} (t-\theta) dt$$

$$= 2\epsilon \int_{\theta}^{\delta-\theta} \frac{2r(1-r^2) \sin t}{(1-2r \cos t + r^2)^2} t dt$$

$$\leq 2\epsilon \int_0^{\pi} -P'_r(t) t dt$$

$$= -2\epsilon [P_r(t)]_0^{\pi} + 2\epsilon \int_0^{\pi} P_r(t) dt \leq 2\pi \epsilon.$$

Zu I: Für $-\delta \leq t \leq 0$ ist $\|\mu(t)\| \leq \epsilon |t| \leq |t-\theta| \epsilon \Rightarrow$

$$\|I\| \leq \epsilon \int_{-\delta}^0 \frac{2r(1-r^2) \sin |t-\theta|}{(1-2r \cos(t-\theta)+r^2)^2} |t-\theta| dt$$

$$= \epsilon \int_{-\delta-\theta}^{-\theta} -P'_r(|t|) |t| dt$$

$$\leq \epsilon \int_{-\pi}^0 -P'_r(|t|) |t| dt = \epsilon \int_0^{\pi} -P'_r(t) t dt \leq \pi \epsilon$$

(s. letzte Zeile von III), q.e.d. (für 1°).

2° Es existiere also $D\mu(0)$; zu zeigen: $\lim_{r \rightarrow 1} u(r) = 2\pi D\mu(0)$.

Natürlich könnte man auch dafür den klassischen Beweis [Du p.4f.]

kopieren. Eleganter ist folgende Rückführung auf Teil 1°:

Es ist $u(r) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) d\mu(t)$. Da P_r gerade ist, ist $u(r) = 0$ ($0 \leq r < 1$)

für gerades μ . Für $j = 0, 1$ sei $\mu_j(t) := \frac{1}{2}(\mu(t) + (-1)^j \mu(-t))$

der gerade bzw. ungerade Anteil von μ und $u_j := P[d\mu_j] \Rightarrow$

$u(r) = u_0(r) + u_1(r) = u_1(r) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 2\pi \mu'_1(0) = 2\pi D\mu(0)$, q.e.d.

(1.8) Exkurs in die skalare Theorie

Sei $\mu: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation, $u := P[\frac{d\mu}{2\pi}]$. Nach dem

Beweis von $\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta_0}) = D\mu(\theta_0)$ (falls $D\mu(\theta_0)$ existiert) schreibt Duren

[Du p.5] "By a refinement of the proof it is even possible to show that $u(z)$ tends to $D\mu(\theta_0)$ along any path not tangent to the unit circle." Dies ist jedoch falsch, wenn man nicht die Existenz von $\mu'(\theta_0)$ voraussetzt. Im folgenden

Beispiel ist μ sogar Lipschitz-stetig, also $u := P[d\mu] = P[\varphi]$, $\varphi \in L^\infty$:

Sei $\theta_0 := 0$, $\mu(t) := |t|$. Offenbar ist $D\mu(0) = 0$. Als nichttangente Kurve wähle ich $\theta = 1-r$ (man könnte genausogut $\theta = c(1-r)$, $c > 0$ fest, nehmen). Ich zeige $\lim_{\theta=1-r \rightarrow 0} u(re^{i\theta}) > 0$:

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d|t| = \int_0^{\pi} P_r(t-\theta) dt - \underbrace{\int_{-\pi}^0 P_r(\theta-t) dt}_{= \int_0^{\pi} P_r(\theta+t) dt} \\ &= \int_{-\theta}^{\pi-\theta} P_r(t) dt - \int_{\theta}^{\pi+\theta} P_r(t) dt \\ &= \int_{-\theta}^{\theta} P_r(t) dt - \int_{\pi-\theta}^{\pi+\theta} P_r(t) dt = \int_{-\theta}^{\theta} P_r(t) dt + o(1). \end{aligned}$$

Für $|t| \leq \theta$ ist $\cos t \geq \cos \theta$, also $P_r(t) \geq \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{für } \theta = 1-r: \quad \int_{-\theta}^{\theta} P_r(t) dt &\geq 2\theta \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = 2(1+r) \frac{\theta(1-r)}{|1-re^{i\theta}|^2} \geq \\ &\geq 2 \frac{\theta^2}{|1-re^{i\theta}|^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } \theta = 1-r, r = 1-\theta \text{ ist } 1-re^{i\theta} &= 1-e^{i\theta}+e^{i\theta} \Rightarrow \\ \frac{1-re^{i\theta}}{\theta} &= \frac{1-e^{i\theta}}{\theta} + e^{i\theta} = -i \frac{e^{i\theta}-1}{i\theta} + e^{i\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} -i+1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{1-re^{i\theta}}{\theta} \right| &\longrightarrow \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\theta^2}{|1-re^{i\theta}|^2} \longrightarrow \frac{1}{2}, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Fatou macht in der klassischen Arbeit [28] eine ähnliche Bemerkung.

Sei $f \in L^1$, $F := P[f]$. Er zeigt [28 p.357]: $f'(0)$ existiert $\Rightarrow$

$\nexists \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial F}{\partial \theta}(z) = f'(0)$, und fährt dann fort: "Il importe d'ailleurs

de remarquer que ce qui précède suppose l'existence de la dérivée de $f(u)$ et non pas seulement de la dérivée généralisée

$$\lim_{\Delta u} \frac{f(u+\Delta u) - f(u-\Delta u)}{2\Delta u}."$$

Man kann dafür das gleiche Beispiel nehmen (d.h. $f = \mu$):

$$\begin{aligned} \text{Es ist ja } P[d\mu](re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) = o(1) + \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta-t) \mu(t) dt \\ &= o(1) + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} P[\mu](re^{i\theta}). \end{aligned}$$

Das folgende Corollar zu Satz (1.7) ist für radiale Limiten in [15 thm.2.5]. Ryan [64] behandelt nur den analytischen Fall, bemerkt aber nach dem Beweis des entsprechenden Satzes [64 thm.2], daß man radiale durch nichttangente Limiten ersetzen kann [64 p.565].

(1.9) Corollar: Sei $\varphi \in L^1(Y)$, $f := P[\varphi]$. Dann ist $\nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = \varphi(\theta)$ f.ü.

Insbesondere hat jedes $f \in H^1(Y)$ f.ü. nichttangente Limiten.

Beweis: $f = \frac{1}{2\pi} P[d\mu]$ für $\mu(\theta) := \int_{-\pi}^{\theta} \varphi(t) dt$. Nach [DU II.2.9] ist $\mu'(\theta) = \varphi(\theta)$ f.ü. Die Behauptung folgt aus Satz (1.7) 1°.

An der folgenden Fassung des Satzes von Hardy-Littlewood [Du thm. 1.8] ist v.a. interessant, daß man nur $f \in h^p(Y)$ anzunehmen braucht und nicht $f \in H^p(Y)$, d.h. f braucht nicht Poisson-Integral einer Bochner- L^p -Funktion zu sein. Der Satz erleichtert auch spätere Beweise.

(1.10) Satz: Sei $f \in h^p(Y)$, $1 < p \leq \infty$, mit (radialen) Maximalfunktion

$F(\theta) := \sup_{0 \leq r < 1} \|f(re^{i\theta})\|$. Dann ist $F \in L^p$ und $\|F\|_p \leq A_p \|f\|_p$,

A_p Konstante unabhängig von f und Y .

(Für A_p kann man das A_p der skalaren Theorie nehmen [Du thm.1.8].)

Beweis: F ist meßbar wegen $F(\theta) = \sup_{\substack{0 \leq r < 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} \|f(re^{i\theta})\|$.

$f \in h^p(Y) \Rightarrow f = P[\varphi]$, $\varphi \in L^p_Y(X', X)$, $\|\varphi\|_p = \|f\|_p$ (Satz (1.5)).

Sei wieder $v_\varphi := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, \varphi \rangle| \Rightarrow v_\varphi \in L^p$ und $\|v_\varphi\|_p = \|\varphi\|_p = \|f\|_p$.

Wie schon im Beweis von Satz (1.5) 2° berechnet, ist

$\|f(re^{i\theta})\| \leq P[v_\varphi](re^{i\theta})$. Ist V die Maximalfunktion von $P[v_\varphi]$,

so folgt $F \leq V$. Der skalare Satz von Hardy-Littlewood [Du thm.1.8]

liefert $V \in L^p$, $\|V\|_p \leq A_p \|v_\varphi\|_p = A_p \|f\|_p$. Also auch

$\|F\|_p \leq A_p \|f\|_p$, q.e.d.

Der folgende Satz ([16 prop.3], z.T. auch schon in [15], [33])

liegt nun auf der Hand:

(1.11) Satz: Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in h^p(Y)$, $\varphi \in L^p(Y)$.

Man betrachte folgende Aussagen:

$1^\circ f = P[\varphi]$ $2^\circ \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = \varphi(\theta)$ f.ü. $3^\circ \lim_{r \rightarrow 1} f_r = \varphi$ in $L^p(Y)$

Es gilt: $3^\circ \xRightarrow{p < \infty} 1^\circ \xRightarrow{p > 1} 2^\circ$.

Beweis: $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$: Gelte $\varphi = \lim_{r \rightarrow 1} f_r$ in $L^p(Y)$. Nach Satz (1.5) ist

$P: L^p(Y) \rightarrow h^p(Y)$ stetig $\Rightarrow P[\varphi] = \lim_{r \rightarrow 1} P[f_r]$ in $h^p(Y)$.

Nach Bemerkung (1.4) 5° sind die Auswertungen $\hat{z}: h^p(Y) \rightarrow Y$ stetig, $z \in D$

$\Rightarrow P[\varphi](z) = \lim_{r \rightarrow 1} P[f_r](z) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(z) = \lim_{r \rightarrow 1} f(rz) = f(z) \quad \forall z \in D$.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$: Corollar (1.9).

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ ($p > 1$): Sei $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ fest. Für $r < 1$:

$$f(rz_0) = f_r(x_0 e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} p_{x_0}(\theta-t) f_r(t) \frac{dt}{2\pi}$$

$\downarrow r \rightarrow 1$

$\downarrow r \rightarrow 1$

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} p_{x_0}(\theta-t) \varphi(t) \frac{dt}{2\pi} = P[\varphi](z_0),$$

da $f_r(t) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \varphi(t)$ f.ü. mit integrierbarer Majorante

$$F(t) = \sup_{r < 1} \|f_r(t)\| \quad (\text{Satz (1.10)}).$$

1° $\Rightarrow$ 3° ($p < \infty$): 1. Fall: $p > 1$: Da 1° $\Rightarrow$ 2° schon bewiesen ist, genügt

$$\text{es, } 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \text{ zu zeigen: } \|f_r - \varphi\|_p^p = \int_0^{2\pi} \|f_r(t) - \varphi(t)\|^p \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0,$$

da $\|f_r(t) - \varphi(t)\| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$ f.ü. mit L^p -Majorante $F(t) + \|\varphi(t)\|$

(Satz (1.10), F wie oben).

2. Fall: $p=1$: Sei $\varphi_t(\theta) := \varphi(\theta-t)$.

$$\begin{aligned} \|f_r - \varphi\|_1 &= \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta}) - \varphi(\theta)\| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \left\| \int_0^{2\pi} p_r(t) [\varphi_t(\theta) - \varphi(\theta)] \frac{dt}{2\pi} \right\| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p_r(t) \|\varphi_t(\theta) - \varphi(\theta)\| \frac{d\theta}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} p_r(t) \|\varphi_t - \varphi\|_1 \frac{dt}{2\pi} = P[\Phi](r), \text{ wobei} \end{aligned}$$

$\Phi(t) := \|\varphi_t - \varphi\|_1$ stetig in 0 ist [HP thm.3.8.3] $\Rightarrow$

$$\|f_r - \varphi\|_1 \leq P[\Phi](r) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \Phi(0) = 0 \quad (\text{s. z.B. [Ko p.11]}), \text{ q.e.d.}$$

Es sei bemerkt, daß man den 1. Fall auch analog zum 2. beweisen

kann. Man hat vor dem Satz von Fubini die Jensensche Ungleichung

(für das Wahrscheinlichkeitsmaß $p_r(t) \frac{dt}{2\pi}$, ähnlich wie im Beweis

von Satz (1.5) 2°) anzuwenden und am Schluß zu beachten, daß auch

$\|\varphi_t - \varphi\|_p$ stetig in $t=0$ ist ($p < \infty$!).

Corollar: $1 < p \leq \infty$. $\mathcal{H}^p(Y) = \{f \in \mathcal{H}^p(Y) : f \text{ hat f.ü. radiale (oder nichttangente) Limiten}\}.$

Beweis: $f \in \mathcal{H}^p(Y)$ hat f.ü. nichttangente Limiten nach Corollar

(1.9). Habe umgekehrt $f \in \mathcal{H}^p(Y)$ f.ü. radiale Limiten $f^*(e^{i\theta})$. Nach

der folgenden Notiz ist $f^* \in L^p(Y)$, also $f = P[f^*] \in \mathcal{H}^p(Y)$ nach dem

Satz.

Notiz: $1 \leq p \leq \infty$, $f \in h^p(Y)$, $f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiere f.ü.
 $\Rightarrow f^* \in L^p(Y)$.

Beweis: Meßbarkeit von f^* ist klar. Nach dem Lemma von Fatou ist

$$\|f^*\|_p \leq \liminf_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_p = \|f\|_p \quad (p < \infty).$$

Bukhvalov und Danilevich waren die ersten, die den engen Zusammenhang zwischen Randeigenschaften harmonischer Funktionen und der Radon-Nikodým-Eigenschaft (RNP) bemerkten. Sie zeigen in [16 thm.2 und anschl. rem.1]:

$$1^\circ \exists p \in (1, \infty): h^p(Y) = \mathcal{H}^p(Y) \Rightarrow Y \text{ RNP}$$

$$2^\circ Y \text{ RNP} \Rightarrow \forall p \in (1, \infty]: h^p(Y) = \mathcal{H}^p(Y).$$

Der folgende Satz stellt eine Verbesserung bzgl. der "Grenzindizes" $p = 1, \infty$ dar:

$$(1.12) \text{ Satz: } 1^\circ h^\infty(Y) = \mathcal{H}^\infty(Y) \Rightarrow Y \text{ hat RNP}$$

$2^\circ Y \text{ hat RNP} \Rightarrow$ jedes $f \in h^1(Y)$ hat f.ü. nichttangente Limiten (insbesondere jedes $f \in h^p(Y)$, $p > 1$, d.h. $h^p(Y) = \mathcal{H}^p(Y)$ nach dem letzten Corollar).

Beweis: 1° Zunächst hat man die RNP nur bzgl. λ zu testen [DU V.3.8]. Auch das folgende Lemma ist wohlbekannt (s. z.B. den Beweis von [DU III.1.5]). Ich skizziere den Beweis, da ich später darauf zurückkommen will.

Lemma: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum, Y Banachraum.

Y hat RNP bzgl. $\mu \Leftrightarrow \forall$ Vektormäße $m: \mathcal{A} \rightarrow Y$ mit $\|m(A)\| \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ existiert $\varphi \in L^1(\mu, Y)$ mit $dm = \varphi d\mu$. (Dann ist automatisch $\|\varphi(\cdot)\| \leq 1$ f.ü.)

Beweis: Zusatz: $\|m(A)\| \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow |m|(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ (Definition von $|m|$). Gilt nun $dm = \varphi d\mu \Rightarrow$ [DU II.2.4]

$d|m| = \|\varphi(\cdot)\| d\mu \Rightarrow \|\varphi(\cdot)\| \leq 1$ f.ü., da $|m| \leq \mu$.

Zum Lemma selbst: Sei $m: \mathcal{A} \rightarrow Y$ Vektormaaß, $m \ll \mu$, $|m|(\Omega) < \infty$.

Auch $|m| < \mu \Rightarrow$ (Radon-Nikodým) $\frac{d|m|}{d\mu} \in L^1_+(\mu)$ existiert.

Sei $\Omega_n := \{\omega \in \Omega : \frac{d|m|}{d\mu}(\omega) \in [n-1, n)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sei $m_n: \mathcal{O} \rightarrow Y$, $m_n(A) := m(A \cap \Omega_n)$; m_n ist Vektormaß und

$\|m_n(A)\| \leq n\mu(A)$, wie man sofort nachrechnet.

Nach Voraussetzung hat m_n eine Radon-Nikodým-Ableitung $\varphi_n \in L^1(\mu, Y)$, und φ_n lebt auf Ω_n .

Sei $\varphi := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Rightarrow \varphi \in L^1(\mu, Y)$ und $\int_A \varphi d\mu = m(A) \quad \forall A \in \mathcal{O}$, q.e.d.

Weiter im Beweis von 1°: Sei also $m: \Sigma \rightarrow Y$ Vektormaß mit

$\|m(A)\| \leq \lambda(A) \quad \forall A \in \Sigma$, d.h. $|m|(A) \leq \lambda(A) \quad \forall A \in \Sigma$.

Sei $f := P[dm] \Rightarrow \|f(re^{i\theta})\| \leq \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) d|m|(t) \leq \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) d\lambda(t) \leq 1$

$\Rightarrow f \in h^\infty(Y)$ und nach Voraussetzung $\exists \varphi \in L^\infty(Y): f = P[\varphi]$.

Also $f = P[dm] = P[\varphi d\lambda] \Rightarrow dm = \varphi d\lambda$, da P auf $M(Y)$ injektiv ist

(Satz (1.5)1°), q.e.d.

Beweis von 2°: Sei $f \in h^1(Y)$. Nach Satz (1.5)1° ist $f = P[dm]$ für

ein $m \in M(Y)$. Sei $\mu = \mu_m$ die m gemäß (1.6) zugeordnete Funktion von

beschränkter Variation, dann ist $f = P[d\mu]$ ((1.6)3°). Da Y die RNP

hat, ist μ f.ü. differenzierbar [DU p.107] also hat f f.ü. nicht-tangentiale Limiten (Satz (1.7)1°).

Der zitierte Satz aus [DU] beruht auf der Lebesgue-Zerlegung von Vektormaßen [DU I.5.9]. Es ist vielleicht interessant zu bemerken, daß man daraus die Behauptung (2°) auch direkt ableiten kann:

Sei $m = m_c + m_s$ mit $m_c, m_s \in M(Y)$, $m_c < \lambda$, $|m_s| \perp \lambda$.

Da Y die RNP hat, existiert $\frac{dm_c}{d\lambda} \in L^1(Y)$, sodaß also

$P[dm_c] = P[\frac{dm_c}{d\lambda}]$ f.ü. nichttangente Limiten hat (Corollar (1.9)).

Andererseits hat $P[dm_s]$ f.ü. Winkellimes 0, denn

$\|P[dm_s](\cdot)\| \leq P[d|m_s|](\cdot)$ und $|m_s|$ ist singulär, also hat die

$|m_s|$ zugeordnete Funktion von beschränkter Variation f.ü. Ableitung 0, also $P[d|m_s|]$ f.ü. Winkellimes 0.

Corollar: Die Aussage "jedes $f \in h^p(Y)$ hat f.ü. radiale (oder nicht-tangentiale) Limiten" ist unabhängig von $p \in [1, \infty]$ (da äquivalent zur RNP).

Übrigens wird ein Satz wie [DU III.3.2] dadurch trivial. Dieser ist natürlich auch direkt nicht allzuschwer zu beweisen. Ich werde aber in §3 einen angenehmen Beweis des Satzes " X RNP, $1 < p < \infty \Rightarrow L^p(\mu, X)$ RNP" angeben, der in [DU V.4] einen wirklich unangenehmen Beweis hat.

(1.13) Schwache Limiten

Satz: Sei $f \in h^1(X)$, $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiere f.ü. schwach $\Rightarrow$
 $\nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$ existiert f.ü. stark.

Beweis: O.B.d.A. ist X separabel. Sei $f^*(e^{i\theta})$ der f.ü. existierende schwache radiale Limes. Ich zeige zunächst $f^* \in L^1(X)$:

f^* ist schwach, also stark meßbar nach dem Satz von Pettis. Da

$\| \cdot \|$ bzgl. $\sigma(X, X')$ nach unten halbstetig ist, gilt

$$\|f^*(e^{i\theta})\| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \|f(re^{i\theta})\| \text{ f.ü., also nach dem Lemma von Fatou}$$

$$\int_T \|f^*\| d\lambda \leq \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_1 = \|f\|_1, \text{ d.h. } f^* \in L^1(X).$$

Sei nun $f = P[dm]$, $m \in M(Y)$, und sei wieder $m = m_c + m_s$ die Lebesgue-

Zerlegung von m . Wie auf S. 29 unten schon festgestellt, hat

$P[dm_s]$ f.ü. starken Winkelgrenzwert 0. Ich zeige nun, daß m_c die

Radon-Nikodým-Dichte f^* hat (dann ist man wegen $f^* \in L^1(X)$,

$P[dm_c] = P[f^*]$ fertig vermöge Corollar (1.9)). Dies folgt aber ein-

fach aus der skalaren Theorie:

$$\text{Es genügt zu zeigen, daß für jedes } x' \in X': \frac{d\langle m_c, x' \rangle}{d\lambda} = \langle f^*, x' \rangle \text{ f.ü.}$$

Nun ist aber $\langle m, x' \rangle = \langle m_c, x' \rangle + \langle m_s, x' \rangle$ die Lebesgue-Zerlegung von

$\langle m, x' \rangle$, also nach skalarer Theorie (s. z.B. [Ho p.38 cor.1])

$$\frac{d\langle m_c, x' \rangle}{d\lambda} = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f_r, x' \rangle = \langle f^*, x' \rangle \text{ f.ü., q.e.d.}$$

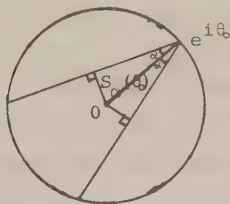
(1.14) Schwach*-Limiten

Ich benötige hier und auch später folgendes klassische

Lemma: Sei s eine subharmonische Funktion auf D . Es gilt:

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} s(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} < \infty \Leftrightarrow s \text{ hat eine harmonische Majorante auf } D.$$

Beweis: z.B. [Pr 3.4 p.26], [G thm.6.7 p.38].



Für das folgende Corollar sind die (in D abgeschlossenen) Winkelbereiche $S_\alpha(\theta_0)$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, definiert wie in [Du p. 5f.]. (Wichtig ist, daß $S_\alpha(\theta_0)$ keinen anderen Randpunkt als Berührungspunkt besitzt.)

Corollar: Sei $f \in h^1(Y)$. Dann gilt für fast alle $\theta \in T$:

$$\sup_{\alpha < \frac{\pi}{2}} \lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in S_\alpha(\theta)}} \|f(z)\| < \infty. \quad \text{Für diese } \theta \text{ ist insbesondere } f \text{ auf allen } S_\alpha(\theta), \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ beschränkt.}$$

Bemerkung: Heins [39 thm.6] hat gezeigt, daß sogar $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \|f(z)\|$ f.ü. existiert.

Beweis: $f \in h^1(Y) \Rightarrow \|f(\cdot)\|$ ist subharmonisch auf D ((1.4)^{1°}), und

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_1 < \infty. \text{ Nach dem Lemma hat } \|f(z)\| \text{ eine har-}$$

monische Majorante $u(z)$ auf D . $u \in h^1$, da $u \geq 0$, also existiert

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} u(z) \text{ f.ü., woraus die Behauptung folgt.}$$

Der Beweis des folgenden Satzes ist nun kanonisch:

Satz: Sei X separabel, $\varphi \in L^1(X', X)$, $f := P[\varphi] \Rightarrow$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = \varphi(\theta) \text{ f.ü. bzgl. } \sigma(X', X).$$

Beweis: Nach dem Corollar gibt es eine Nullmenge $N_0 \subset T$, sodaß

$$\forall \theta \notin N_0: f \text{ ist auf allen } S_\alpha(\theta) \ (\alpha < \frac{\pi}{2}) \text{ beschränkt.}$$

Sei $\{x_n: n \in \mathbb{N}\} \subset X$ dicht. Wegen $\langle x, f \rangle = P[\langle x, \varphi \rangle]$ existiert nach skalarer Theorie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $N_n \subset T$, so daß

$$\forall \theta \notin N_n: \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \langle x_n, f(z) \rangle = \langle x_n, \varphi(\theta) \rangle.$$

Sei nun $N := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$ und $\theta \notin N$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ und $\delta > 0$ so daß

$$\forall z \in S_{\alpha}(\theta), |z - e^{i\theta}| \leq \delta: |\langle x_n, f(z) - \varphi(\theta) \rangle| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall z \in S_{\alpha}(\theta), |z - e^{i\theta}| \leq \delta:$$

$$\begin{aligned} |\langle x, f(z) - \varphi(\theta) \rangle| &\leq |\langle x - x_n, f(z) - \varphi(\theta) \rangle| + |\langle x_n, f(z) - \varphi(\theta) \rangle| \\ &\leq \varepsilon \left(\sup_{z \in S_{\alpha}(\theta)} \|f(z)\| + \|\varphi(\theta)\| \right) + \varepsilon, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Aus dem Satz (und Satz (1.5)2°) folgt insbesondere, daß für $p > 1$ jedes $f \in h^p(X')$ f.ü. schwach*-Winkelgrenzwerte besitzt (X separabel!). Das Gleiche gilt für $f \in h^1(X')$, wie schon Grossetête [34 1.Abs.2] bemerkt. Genauer:

(1.15) Satz: Sei X separabel, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in h^p(X') \Rightarrow$

$$f^*(\theta) := \nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) \text{ existiert f.ü. bzgl. } \sigma(X', X), f^* \in L^p(X', X),$$

und, falls $p > 1$, $f = P[f^*]$.

Beweis: 1. Fall: $p > 1$. Sei $f = P[\varphi]$, $\varphi \in L^p(X', X)$ gemäß Satz (1.5).

Nach Satz (1.14) existiert $f^* = \varphi$ f.ü.

2. Fall: $p = 1$. Sei $f = P[dm]$, $m \in M(X')$ gemäß Satz (1.5), und sei wieder $m = m_c + m_s$ die Lebesgue-Zerlegung von m . Wie schon mehrfach bemerkt, gilt $\nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} P[dm_s](z) = 0$ f.ü. sogar stark; man kann also

$m_s = 0$, $m \ll \lambda$ annehmen. Nach (0.8)4° $\exists \varphi \in L^1(X', X)$ mit $dm = \varphi d\lambda$, also ist $f = P[\varphi]$. Nach Satz (1.14) existiert $f^* = \varphi$ f.ü.

Die Voraussetzung der Separabilität von X ist wesentlich. In (2.16) gebe ich ein Beispiel einer beschränkten holomorphen Funktion, die in keinem Randpunkt einen schwach* radialen Limes besitzt.

Zum Abschluß dieses Pragraphen zeige ich einen Satz über operatorwertige h^p -Funktionen. Die Voraussetzung ist z.B. erfüllt für $X = Y =$ separabler Hilbertraum. Für X separabel, $Y = \mathbb{C}$ erhält man die 1. Aussage des letzten Satzes zurück.

(1.16) Satz: Sei X separabel, Y habe RNP, und sei $f \in h^1(L(X, Y))$.

Dann hat f f.ü. nichttangentielle Limiten in der starken Operator-Topologie.

Beweis: Für $x \in X$ fest ist $f(\cdot)(x) =: f_x \in h^1(Y)$, da $\hat{x}: L(X, Y) \rightarrow Y$,

$l \mapsto l(x)$ linear und stetig ist. Da Y die RNP hat, gibt es nach

Satz (1.12) 2° zu jedem $x \in X$ eine Nullmenge $N_x \subset T$, so daß

$\forall \theta \notin N_x: \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f_x(z)$ existiert. Nach Corollar (1.14) gibt es außer-

dem eine Nullmenge $N' \subset T$, sodaß für alle $\theta \notin N'$ $f(z)$ auf allen

$S_\alpha(\theta)$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) beschränkt ist. Wähle $\{x_n: n \in \mathbb{N}\} \subset X$ dicht und setze

$$N := N' \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{x_n}.$$

Behauptung: $\forall \theta \notin N \forall x \in X$ existiert $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f_x(z) =: f_x^*(\theta)$.

Beweis: Seien $\alpha < \frac{\pi}{2}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$.

Da $\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in S_\alpha(\theta)}} f_{x_n}(z)$ existiert, gibt es $\delta > 0$ mit:

$$\forall z, w \in S_\alpha(\theta): |z - e^{i\theta}|, |w - e^{i\theta}| \leq \delta \Rightarrow \|f_{x_n}(z) - f_{x_n}(w)\| \leq \varepsilon.$$

Also $\forall z, w \in S_\alpha(\theta)$ mit $|z - e^{i\theta}|, |w - e^{i\theta}| \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \|f_x(z) - f_x(w)\| &\leq \|f_x(z) - f_{x_n}(z)\| + \|f_{x_n}(z) - f_{x_n}(w)\| + \|f_{x_n}(w) - f_x(w)\| \\ &\leq \|f(z)\| \|x_n - x\| + \varepsilon + \|f(w)\| \|x_n - x\| \\ &\leq 2\varepsilon \sup_{\zeta \in S_\alpha(\theta)} \|f(\zeta)\| + \varepsilon, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Weiter: Setze $f^*(\theta)(x) := f_x^*(\theta)$ ($\theta \notin N$).

$$\Rightarrow \text{für } \theta \notin N: \|f^*(\theta)(x)\| = \lim_{r \rightarrow 1} \|f(re^{i\theta})(x)\| \leq \sup_{r < 1} \|f(re^{i\theta})\| \|x\|,$$

also $f^*(\theta) \in L(X, Y)$ (Linearität ist klar nach Konstruktion)

und $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow e^{i\theta}} f^*(\theta)$ punktweise stark nach Konstruktion, q.e.d.

§2: Vektorwertige H^p -Funktionen

Da $H^p(Y)$ genau aus den holomorphen $h^p(Y)$ -Funktionen besteht, ist es nun mittels §1 ein Leichtes, eine übersichtliche Theorie der vektorwertigen H^p -Funktionen darzustellen. Diese ist im wesentlichen bekannt ([64], [65], [15], [16] u.a.). Wie im skalaren Fall ist es sinnvoll und nützlich, auch $0 < p < 1$ zuzulassen und v.a. auch die vektorwertige Nevanlinna-Klasse $N(Y)$ einzuführen. Nach den einleitenden Definitionen zeige ich zunächst das Analogon (2.5) zu Satz (1.5), also die Poisson-Integraldarstellung. Die h^p - und H^p -Theorien laufen wie im klassischen Fall bei $p = 1$ auseinander: h^1 -Funktionen sind nur Poisson-Integrale über Maße (klassisch: Poisson-Stieltjes-Integrale), H^1 -Funktionen aber stets über Funktionen (klassisch: Poisson-Integrale). Analoges gilt für den vektorwertigen Fall. Es ist interessant zu bemerken, daß man an dieser Stelle die skalare Theorie entscheidend verwendet, nämlich in Gestalt des F. und M. Riesz - Theorems (analytische Maße sind absolutstetig), das bekanntlich "äquivalent" zur Poisson-Integraldarstellung von H^1 ist. Der direkte Beweis der letzteren ([Duthm. 3.1], [R thm.17.12]) verwendet nach Abspaltung des Blaschke-Produkts (was im vektorwertigen Fall noch gelingen würde) in entscheidender Weise die Existenz der Wurzel einer nichtverschwindenden holomorphen Funktion (Duren im Beweis von thm.2.6, Rudin in rem.17.11), und allein dieser Begriff ist im vektorwertigen Fall leider sinnlos. Wie auch immer, aus dem skalaren folgt sofort das vektorwertige F. und M. Riesz - Theorem (2.3) und daraus die gewünschte Poisson-Integraldarstellung für $H^1(Y)$ -Funktionen.

Wie im skalaren Fall gilt der Satz von Hardy-Littlewood vektorwertig im Bereich $0 < p \leq \infty$ (2.6); er erleichtert den Beweis des folgenden Satzes (2.7), der (1.11) entspricht. Wichtig für das Folgende ist der vektorwertige Satz von F. und R. Nevanlinna (2.8) über die Darstellung von Funktionen der Nevanlinna-Klasse als Quotienten von H^∞ -Funktionen. Er erlaubt es, die Corollar (1.12) entsprechende Aussage (2.9) zu machen: Die Bedingung "alle $f \in H^p(Y)$ haben f.ü. radiale Limiten" ist von $p \in (0, \infty]$ unabhängig. Man beachte, daß die Beweise der analogen Aussagen Corollar (1.12) und (2.9) gegenseitig übertragbar sind (selbst wenn man auch im holomorphen Fall nur an $p \in [1, \infty]$ interessiert ist): Der Beweis in §1 beruhte auf dem Reduktionslemma (1.12), in dessen Beweis das gegebene Vektormäß m in Maße m_n mit disjunkten Trägern zer-

schlagen wurde, was aber natürlich bei analytischem m die Analytizität zerstört. Andererseits hat man für h^1 -Funktionen keine Darstellung als Quotient von h^∞ -Funktionen.

In [15] definiert Bukhvalov die analytische Radon-Nikodým-Eigenschaft (aRNP) für Y durch die Bedingung " $\forall p \in [1, \infty] \forall f \in H^p(Y)$
 $\exists \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ f.ü.". Ich ziehe es vor, analog zur RNP zu definieren (2.10): Y hat aRNP $\Leftrightarrow$ jedes analytische $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ hat eine Radon-Nikodým-Ableitung. Die Definitionen sind natürlich äquivalent (2.10), aber aus meiner Definition folgt die Implikation "RNP $\Rightarrow$ aRNP" trivial, während man bei Bukhvalovs Definition Satz (1.12) bemühen muß. c_0 hat die aRNP nicht (2.12). Im übrigen wird die aRNP in §3 näher untersucht.

Bezüglich schwacher und schwach*-Limiten sowie operatorwertiger H^p -Funktionen gelten die Analoga zu §1 ((2.13)-(2.15)), wobei man nur $f \in N(Y)$ voraussetzen muß. Zum Schluß behandle ich die Frage der Existenz/Nichtexistenz von Limiten auf vorgegebenen Mengen (2.16). Insbesondere braucht eine $H^\infty(X')$ -Funktion in keinem Randpunkt auch nur einen schwach* radialen Limes zu besitzen (2.17).

Vektorwertige H^p -Funktionen wurden schon von vielen Autoren untersucht, z.T. mit Werten in lokalkonvexen Räumen. Neben den bereits genannten Arbeiten (die die wichtigsten sind) verweise ich auf [HP 6.4], [BM], [33], [34], [20], [21], [41], [42], [18], [27], [2], [38], [54], [55], [74], [29].

Die Theorie der vektorwertigen holomorphen Funktionen [HP III.2] setze ich als bekannt voraus.

(2.1) Definition - Lemma: Es sei $Y \subset X'$ und $C_r(t) := \frac{1}{1-re^{it}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int}$ der Cauchy-Kern.

1° Für $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ heißt $C[d\mu]: D \rightarrow Y$, $C[d\mu](re^{i\theta}) := \int_0^{2\pi} C_r(\theta-t) d\mu(t)$ das Cauchy-Integral von μ . Es ist

$C[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n$ mit absolut und in D kompakt konvergenter Reihe.

2° Für $\varphi \in L^1(X', X)$ heißt $C[\varphi]: D \rightarrow X'$, $C[\varphi](re^{i\theta}) := \int_0^{2\pi} C_r(\theta-t) \varphi(t) \frac{dt}{2\pi}$ das Cauchy-Integral von φ . Es ist

$C[\varphi](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}(n) z^n$ mit absolut und in D kompakt konvergenter Reihe.

War $\varphi \in L^1_Y(X', X)$, so ist $C[\varphi]: D \rightarrow Y$.

Beweis: 1° (vgl. Beweis von Lemma (1.1)) Die Konvergenzaussage ist trivial. Es ist

$$\begin{aligned} C[d\mu](re^{i\theta}) &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} d\mu(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n \text{ bei } z = re^{i\theta}. \end{aligned}$$

2° folgt (bis auf die letzte Aussage) aus 1°, vgl. Beweis von Lemma (1.2), da $C[\varphi] = C[\varphi d\lambda]$.

Letzte Aussage: $\varphi \in L_Y^1(X', X) \Rightarrow \hat{\varphi}(n) \in Y$ nach Lemma (1.5) 2°.

(2.2) Definition - Lemma: 1° Sei $\mu \in M(Y)$. μ heißt analytisch : $\Leftrightarrow \hat{\mu}(n) = 0 \forall n < 0$. Es gilt:

μ ist analytisch $\Leftrightarrow P[d\mu]$ ist analytisch $\Leftrightarrow P[d\mu] = C[d\mu]$.

2° Sei $\varphi \in L^1(X', X)$. φ heißt analytisch : $\Leftrightarrow \hat{\varphi}(n) = 0 \forall n < 0$. Es gilt:
 φ ist analytisch $\Leftrightarrow P[\varphi]$ ist analytisch $\Leftrightarrow P[\varphi] = C[\varphi]$.

Beweis: 1° Es ist $P[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(-n) \bar{z}^n$ (Lemma (1.1))
 und $C[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n$ (Lemma (2.1)).

Also hat man: μ analytisch $\Rightarrow P[d\mu] = C[d\mu] \Rightarrow P[d\mu]$ analytisch $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \mu$ analytisch. (Zur letzten Implikation: $f := P[d\mu]$ analytisch $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall n \geq 1: \hat{\mu}(-n) = \frac{\partial^n f}{\partial \bar{z}^n}(0) = 0$.)

2° folgt aus 1° (setze $d\mu := \varphi d\lambda$).

Bezeichnungen: $M_a(Y) := \{\mu \in M(Y) : \mu \text{ ist analytisch}\}$

$L_a^p(Y) := \{\varphi \in L^p(Y) : \varphi \text{ ist analytisch}\}$

$L_a^p(X', X) := \{\varphi \in L^p(X', X) : \varphi \text{ ist analytisch}\}$

$L_{Y,a}^p(X', X) := \{\varphi \in L_Y^p(X', X) : \varphi \text{ ist analytisch}\}$

(wobei $1 \leq p \leq \infty$). Diese Räume sind abgeschlossen in ihren jeweiligen Oberräumen (also Banachräume), da die Zuordnung des n. Fourierkoeffizienten ($n \in \mathbb{Z}$) stetig ist.

Wie schon in der Einleitung ausgeführt, ist das folgende vektorwertige F. und M. Riesz - Theorem ([65], [33], [42]) grundlegend

für die Behandlung von $H^1(Y)$.

(2.3) Satz: Sei $\mu \in M(Y)$.

μ analytisch $\Rightarrow \mu \ll \lambda$, und $\lambda \ll |\mu|$ (außer $\mu = 0$).

Beweis: Sei μ analytisch $\Rightarrow \langle \mu, Y' \rangle$ analytisch $\forall Y' \in Y'$.

Sei nun $E \in \Sigma$, $\lambda(E) = 0 \Rightarrow \langle \mu(E), Y' \rangle = 0 \forall Y' \in Y'$ nach dem skalaren F. und M. Riesz - Theorem [R thm.17.13]. Also $\mu(E) = 0$, d.h. $\mu \ll \lambda$.

Sei nun $E \in \Sigma$ mit $\lambda(E) > 0$ und $|\mu|(E) = 0$; zu zeigen ist $\mu = 0$.

Dazu kann man offenbar $Y = \mathbb{C}$ annehmen. Dann ist $d\mu = \varphi d\lambda$ mit $\varphi \in L_a^1 = H^1$ [Ho p.51]. Nach Voraussetzung ist $|\mu|(E) = \int_E |\varphi| d\lambda = 0$, also $\varphi = 0$ in E λ -f.ü. Da $\varphi \in H^1$, ist $\varphi = 0$ λ -f.ü. [Ho cor.2 p.52], d.h. $\mu = 0$.

Bemerkung: Nach (0.8)4° ist $\varphi \mapsto \varphi d\lambda$, $L_Y^1(X', X) \rightarrow M_C(Y) = \{\mu \in M(Y) : \mu \ll \lambda\}$ isometrischer Isomorphismus. Aus dem Satz folgt, daß die Restriktion $L_{Y,a}^1(X', X) \rightarrow M_a(Y)$ surjektiv, also isometrischer Isomorphismus ist.

Ich komme nun zur Definition der Räume $H^D(Y)$ und $N(Y)$. Bzgl. N folge ich dabei [R 17.6]: Für meßbares $\varphi: T \rightarrow Y$ sei

$$\|\varphi\|_0 := e^{\int_0^{2\pi} \ln^+ \|\varphi(t)\| \frac{dt}{2\pi}}.$$

(2.4) Definition: Sei Y Banachraum. Für $f: D \rightarrow Y$ sei $f_r: T \rightarrow Y$, $f_r(e^{it}) := f(re^{it})$.

Für $f: D \rightarrow Y$ holomorph und $0 \leq p \leq \infty$ sei $\|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p$.

$H^D(Y) := \{f: D \rightarrow Y \text{ holomorph} : \|f\|_p < \infty\}$, $0 < p \leq \infty$

$N(Y) := \{f: D \rightarrow Y \text{ holomorph} : \|f\|_0 < \infty\}$

Es ist aus schreibtechnischen Gründen manchmal bequem,

$H^0(Y) := N(Y)$ zu setzen.

Bemerkungen: 1° Für $f: D \rightarrow Y$ holomorph, $0 < p < \infty$, sind $\|f(\cdot)\|^p$ und $\ln^+ \|f(\cdot)\|$ subharmonisch; Beweis analog (1.4)1°.

2° Für $0 \leq p \leq \infty$ ist $\|f_r\|_p$ monoton steigend bzgl. r , also

$\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_p$; sowie $\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} \|f(z)\|$, also $H^\infty(Y)$ der Raum

der beschränkten Y -wertigen holomorphen Funktionen. Beweis analog (1.4) 2°.

3° Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $H^p(Y) \subset h^p(Y)$ Unterbanachraum wegen (1.4) 5°.

4° Für $f: D \rightarrow Y$ holomorph, $0 < p \leq q \leq \infty$ ist

$\|f\|_p \leq \|f\|_q$ und $\|f\|_0^p \leq 1 + \|f\|_p^p$ (Jensensche Ungleichung),

also hat man die Skala $H^q(Y) \subset H^p(Y) \subset N(Y)$.

Darauf wird im folgenden nicht mehr hingewiesen.

Der folgende Satz stammt von Ryan ([64 thm.1&3],[65 thm.2]) für Duale von (separablen) Banachräumen und in allgemeiner Form von Bukhvalov [15 thm.2.7]. Der Beweis ist mit Satz (1.5) und Bemerkung (2.3) nun fast trivial.

(2.5) Satz: Sei $Y \subset X'$, $1 \leq p \leq \infty$. Das Poisson- (oder Cauchy-)

Integral definiert einen isometrischen Isomorphismus

$P: L_{Y,a}^p(X', X) \rightarrow H^p(Y)$; $\varphi \mapsto P[\varphi] = C[\varphi]$.

Bezeichnung: Das Bild von $L_a^p(Y)$ unter P bezeichne ich mit $\mathcal{H}^p(Y)$.

$\mathcal{H}^p(Y)$ ist Unterbanachraum sowohl von $H^p(Y)$ als auch von $\mathcal{H}^p(Y)$

und es gilt $\mathcal{H}^q(Y) \subset \mathcal{H}^p(Y)$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Beweis: $P[\varphi] = C[\varphi]$ für $\varphi \in L_{Y,a}^p(X', X)$ folgt aus Lemma (2.2) 2°.

1. Fall: $p=1$. Betrachte den isometrischen Isomorphismus

$P: M(Y) \rightarrow h^1(Y)$ von (1.5) 1°. Dabei wird $M_a(Y)$ auf $H^1(Y)$ abgebildet

(Lemma (2.2) 1°). Nach Bemerkung (2.3) kann man $M_a(Y)$ durch

$L_{Y,a}^1(X', X)$ ersetzen.

2. Fall: $1 < p \leq \infty$. Betrachte den isometrischen Isomorphismus

$P: L_Y^p(X', X) \rightarrow h^p(Y)$ von (1.5) 2°. Dabei wird $L_{Y,a}^p(X', X)$ auf $H^p(Y)$

abgebildet (Lemma (2.2) 2°). Q.e.d.

Wie im skalaren Fall gilt das Maximaltheorem von Hardy-Littlewood im analytischen Fall für $0 < p \leq \infty$:

(2.6) Satz: Sei $f \in H^p(Y)$, $0 < p \leq \infty$, mit (radialer) Maximalfunktion

$$F(\theta) := \sup_{r < 1} \|f(re^{i\theta})\| \Rightarrow$$

$F \in L^p$ und $\|F\|_p \leq B_p \|f\|_p$ mit B_p unabhängig von f und Y .

(Für B_p kann man das B_p der skalaren Theorie nehmen [Du thm.1.9].)

Beweis: Man kann den skalaren Beweis [Du p.12f.] wörtlich übertragen, indem man $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$ ersetzt.

Anwendung: Sei $f = P[\varphi]$ mit $\varphi \in L^1_{Y,a}(X', X) \Rightarrow$

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r = \varphi \text{ bzgl. } \sigma(L^1(X', X), L^\infty(X)).$$

(Die analoge Aussage für $p > 1$ gilt nach Bemerkung (1.5).)

Beweis: Sei $\psi \in L^\infty(X)$; zu zeigen: $\int_T \langle \psi, f_r \rangle d\lambda \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} \int_T \langle \psi, \varphi \rangle d\lambda$.

Die Aussage gilt, falls ψ Treppenfunktion ist, wie in Bemerkung

(1.5) notiert. Seien $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Treppenfunktionen mit $\psi_n \rightarrow \psi$ f.ü.

Man kann auch $\|\psi_n\|_\infty \leq 2\|\psi\|_\infty$ erreichen. Sei $F \in L^1$ die Maximalfunktion

zu f und $v_\varphi := L^1\text{-sup}_{\|x\| \leq 1} |\langle x, \varphi \rangle|$. Nach (0.5)5° gilt für jede $L^\infty(X)$ -

Funktion $\tilde{\psi}$: $\int_T \langle \tilde{\psi}, \varphi \rangle d\lambda \leq \int_T \|\tilde{\psi}\| v_\varphi d\lambda$. Damit:

$$\begin{aligned} |\int \langle \psi, f_r - \varphi \rangle d\lambda| &\leq |\int \langle \psi_n, f_r - \varphi \rangle d\lambda| + |\int \langle \psi - \psi_n, f_r \rangle d\lambda| + |\int \langle \psi - \psi_n, \varphi \rangle d\lambda| \\ &=: I_{n,r} + II_{n,r} + III_n. \end{aligned}$$

Es ist $II_{n,r} \leq \int \|\psi - \psi_n\| \|f_r\| d\lambda \leq \int \|\psi - \psi_n\| F d\lambda \xrightarrow[r \rightarrow 1]{n \rightarrow \infty} 0$,
 da $\|\psi - \psi_n\| F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ punktweise f.ü. und mit integrierbarer Majorante $3\|\psi\|_\infty F$.

Weiter gilt $III_n \leq \int \|\psi - \psi_n\| v_\varphi d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

da $\|\psi - \psi_n\| v_\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ punktweise f.ü. und mit integrierbarer Majorante $3\|\psi\|_\infty v_\varphi$.

Wähle nun zu gegebenem $\epsilon > 0$ n so groß, daß

$II_{n,r} \leq \epsilon$ für alle $r < 1$ und $III_n \leq \epsilon$. Da für dieses feste n

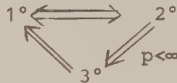
$I_{n,r} \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 0$, folgt die Behauptung.

Die Hauptanwendung des Satzes von Hardy-Littlewood ist aber natürlich der Beweis des folgenden Satzes, der von Bukhvalov und Danilevich stammt [16 prop.1]:

(2.7) Satz: Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p(Y)$, $\varphi \in L^p(Y)$. Man betrachte folgende Aussagen:

$1^\circ f = P[\varphi]$ $2^\circ \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = \varphi(\theta)$ f.ü. $3^\circ \lim_{r \rightarrow 1} f_r = \varphi$ in $L^p(Y)$

Es gilt:



Zusatz: $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ gilt sogar für $0 < p < \infty$.

(Außerdem wird in (2.8) Corollar 3 (unter Verwendung des Satzes für $p = 1$) gezeigt, daß $3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ sogar für $0 < p \leq \infty$ gilt.)

Beweis: $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ und $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$: Satz (1.11).

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ wurde in Satz (1.11) für $1 < p \leq \infty$ bewiesen. Der gleiche Beweis funktioniert nun auch für $p = 1$, da die Maximalfunktion

$F(\theta) := \sup_{r < 1} \|f(re^{i\theta})\|$ für $f \in H^1(Y)$ integrierbar ist (Satz (2.6)).

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ für $0 < p < \infty$: $\|f_r - \varphi\|_p^p = \int_0^{2\pi} \|f_r(t) - \varphi(t)\|^p \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$,

da $\|f_r(t) - \varphi(t)\| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$ punktweise f.ü. und mit L^p -Majorante $F(t) + \|\varphi(t)\|$ (Satz (2.6), F wie oben).

Corollar: $1 \leq p \leq \infty$. $\mathcal{H}^p(Y) = \{f \in H^p(Y) : f \text{ hat f.ü. radiale (oder nichttangente) Limiten}\}$.

Beweis: $f \in \mathcal{H}^p(Y)$ hat f.ü. nichttangente Limiten nach Corollar (1.9). Habe umgekehrt $f \in H^p(Y)$ f.ü. radiale Limiten $f^*(e^{i\theta})$.

Nach der folgenden Notiz ist $f^* \in L^p(Y)$, also $f = P[f^*] \in \mathcal{H}^p(Y)$ nach dem Satz.

Notiz: $0 < p \leq \infty$, $f \in H^p(Y)$, $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) =: f^*(e^{i\theta})$ existiere f.ü.
 $\Rightarrow f^* \in L^p(Y)$.

Beweis: Lemma von Fatou ($p < \infty$).

Man steuert nun eine zu Corollar (1.14) analoge Aussage an:

Die Bedingung "jedes $f \in H^p(Y)$ hat f.ü. radiale Limiten" ist von $p \in [0, \infty]$ unabhängig. Grundlegend hierfür ist der folgende vektorwertige Satz von F. und R. Nevanlinna. Der Satz findet sich ohne Beweis in [16, Beweis von prop.2], [21 p.456 oben]. Von den verschiedenen (skalaren) Beweisen der Lehrbuchliteratur ([Du thm.2.1], [R 17.19], [Pr 2.1]) läßt sich keiner auf den vektorwertigen Fall übertragen, u.a. deswegen nicht, weil selbst für $f \in N(Y)$ ohne Nullstelle (dies ließe sich durch Ausfaktorisieren des Blaschke-Produkts noch erreichen) $\ln \|f(z)\|$ nicht harmonisch zu sein braucht (betrachte etwa $f: D \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) := (\frac{1}{2}, z)$). Der folgende Beweis ist aber kürzer als diese ganzen Erörterungen.

(2.8) Satz: Sei $f \in N(Y) \Rightarrow \exists g \in H^\infty(Y)$, $h \in H^\infty$, h ohne Nullstelle, so daß $f = \frac{g}{h}$.

Anmerkung: Umkehrung gilt auch, sogar ohne die Voraussetzung "h ohne Nullstelle" (natürlich hat man aber f als analytisch voraussetzen). Beweis hierfür wie im skalaren Fall [Du thm.2.1].

Beweis: Nach Voraussetzung und Lemma (1.14) gibt es ein harmonisches u mit $\ln^+ \|f(z)\| \leq u(z)$, $z \in D$ (insbesondere $u \geq 0$)

$\Rightarrow \ln \|f(z)\| \leq u(z)$ (links kann $-\infty$ stehen)

$\Rightarrow \|f(z)\| \leq e^{u(z)}$, d.h. $\|fe^{-u}\| \leq 1$.

Sei nun v harmonische Konjugierte zu u

$\Rightarrow f = \frac{e^{-(u+iv)} f}{e^{-(u+iv)}}$ ist die gewünschte Darstellung.

Corollar 1: Hat $f \in N(Y)$ f.ü. radiale Limiten, so auch f.ü. nichttangentielle Limiten. (Für $f \in H^1(Y)$ weiß man dies schon nach Corollar (2.7).)

Beweis: Sei $f = \frac{g}{h}$ wie im Satz. $h \in H^\infty$ hat f.ü. nichttangentielle Limiten $\neq 0$ [Du thm. 2.2]. Hat also f f.ü. radiale Limiten,

so auch g . Nach Corollar (2.7) hat g f.ü. nichttangente Limite, also auch f .

Bemerkung 1: Danilevich bemerkt in [21 la.1.6], daß für $f \in H^\infty(Y)$ das Corollar sogar "punktweise" gilt, d.h. aus der Existenz des radialen Limes in einem festen Randpunkt folgt schon die des nichttangentialen Limes in diesem Randpunkt. Damit kann man das Corollar folgendermaßen verbessern: Hat $f \in N(Y)$ f.ü. radiale Limite auf einer Menge $E \subset T$ positiven Maßes, so auch f.ü. nichttangente Limite auf E .

Corollar 2: Sei $f \in N(Y)$. Dann gilt für fast alle $\theta \in T$:

$$\sup_{\alpha < \frac{\pi}{2}} \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in S_\alpha(\theta)}} \|f(z)\| < \infty.$$

Für diese θ ist insbesondere f auf allen $S_\alpha(\theta)$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, beschränkt.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Satz, oder auch aus seinem Beweis:

$$\|f(z)\| \leq e^{u(z)}; u \in h^1 \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} u(z) \text{ existiert f.ü.} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Bemerkung 2: Mit dem Satz von Heins (Bemerkung (1.14)) kann man das Corollar folgendermaßen verbessern:

$$f \in N(Y) \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \|f(z)\| \text{ existiert f.ü.}$$

Corollar 3: Sei $0 < p \leq \infty$, $f \in H^p(Y)$, $\varphi \in L^p(Y)$.

Aus $f_r \rightarrow \varphi$ in $L^p(Y)$ folgt $f_r \rightarrow \varphi$ f.ü.

(Für $1 \leq p < \infty$ weiß man dies schon nach Satz (2.7).)

Beweis: Sei $f = \frac{g}{h}$, $g \in H^\infty(Y)$, $h \in H^\infty$ ohne Nullstelle.

Sei $h^* \in L^\infty$ mit $h_r \rightarrow h^*$ f.ü.

$$f_r \rightarrow \varphi \text{ in } L^p(Y) \Rightarrow \exists r_n \rightarrow 1 \text{ mit } f_{r_n} \rightarrow \varphi \text{ f.ü.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{r_n} = h_{r_n} f_{r_n} \rightarrow h^* \varphi =: \psi \text{ f.ü., also ist } \psi \in L^\infty, \|\psi\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

Ich zeige nun $g_r \rightarrow \psi$ in $L^1(Y)$: Es genügt, für jede Folge $r_n \rightarrow 1$ eine Teilfolge (r_{n_k}) zu finden mit $g_{r_{n_k}} \rightarrow \psi$ ($k \rightarrow \infty$) in $L^1(Y)$.

Sei also $r_n \rightarrow 1$ gegeben. $f_{r_n} \rightarrow \varphi$ in $L^p(Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge (r_{n_k}) mit $f_{r_{n_k}} \rightarrow \varphi$ f.ü. $\Rightarrow$

$\Rightarrow g_{r_{n_k}} = h_{r_{n_k}} f_{r_{n_k}} \rightarrow h^* \varphi = \psi$ f.ü. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int \|g_{r_{n_k}} - \psi\| d\lambda \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, da der Integrand durch $2 \|g\|_\infty$ majorisiert ist.

Nach Satz (2.7) ($p=1$), angewandt auf g und ψ , folgt $g_r \rightarrow \psi$ f.ü.,

also auch $f_r = \frac{g_r}{h_r} \rightarrow \frac{\psi}{h^*} = \varphi$ f.ü. ($h^* \neq 0$ f.ü.!), q.e.d.

Aus dem Satz folgt nun sofort die gewünschte p -Unabhängigkeit
[(16 prop.2] für $p \geq 1$):

(2.9) Satz: Hat jedes $f \in H^\infty(Y)$ f.ü. radiale Limiten, so auch jedes $f \in N(Y)$.

M.a.W.: Die Aussage "jedes $f \in H^p(Y)$ hat f.ü. radiale Limiten" ist unabhängig von $p \in [0, \infty]$.

Beweis: Sei $f \in N(Y)$, $g \in H^\infty(Y)$, $h \in H^\infty$ ohne Nullstelle, so daß $f = \frac{g}{h}$ (Satz (2.8)). h hat f.ü. radiale Limiten $\neq 0$, g hat f.ü. radiale Limiten nach Voraussetzung $\Rightarrow f$ hat f.ü. radiale Limiten.

Im harmonischen Fall charakterisierte die RNP die F.-ü.-Existenz radialer Limiten aller $h^p(Y)$ -Funktionen. Die analoge (notwendig abgeschwächte) vektormaßtheoretische Bedingung für den analytischen Fall lautet so:

(2.10) Definition - Satz: Ein Banachraum Y hat die analytische Radon-Nikodým-Eigenschaft (aRNP) : $\Leftrightarrow$

$\forall \mu \in M_a(Y) \exists \varphi \in L^1(Y) : d\mu = \varphi d\lambda$, d.h. in Worten,

falls jedes analytische (also nach (2.3) absolutstetige) Y -wertige Vektormaß von beschränkter Variation eine Bochner-integrierbare Radon-Nikodým-Ableitung besitzt (die dann automatisch analytisch ist).

Es gilt: Y hat aRNP $\Leftrightarrow H^1(Y) = \mathbb{H}^1(Y)$ (d.h. wegen Corollar (2.7): jedes $f \in H^1(Y)$ hat f.ü. radiale Limiten. Dies, zusammen mit (2.9), zeigt die Äquivalenz zur Definition in [15 p.1055], [16 p.105].)

Beweis: Gemäß Bemerkung (2.3) und Satz (2.5) (oder nach dem Beweis von Satz (2.5) 1. Fall) hat man

$$\begin{array}{ccc} M_a(Y) & \xrightarrow[\sim]{P} & H^1(Y) \\ U & & U \\ L_a^1(Y) & \xrightarrow[\sim]{P} & \mathbb{H}^1(Y) \end{array} \text{ kommutativ.}$$

aRNP bedeutet Gleichheit links, also Gleichheit rechts, q.e.d.

Die aRNP wird im nächsten Paragraphen näher untersucht. Insbesondere zeigt sich, daß sie eine echte Abschwächung der RNP ist. Einige triviale Folgerungen enthält das

Corollar: 1° RNP $\Rightarrow$ aRNP

2° Y aRNP $\Rightarrow$ jeder Unterbanachraum von Y hat aRNP

3° Hat jeder separable Unterbanachraum von Y die aRNP, so auch Y .

4° Y aRNP $\Leftrightarrow \forall \mu \in M_a(Y)$ mit $\|\mu(E)\| \leq \lambda(E) \quad \forall E \in \Sigma \quad \exists \varphi \in L^1(Y) : d\mu = \varphi d\lambda$.

(Dann ist automatisch $\|\varphi(\cdot)\| \leq 1$ f.ü.)

Beweis: 1° - 3° sind trivial.

4° Der Zusatz steht schon in Lemma (1.12). Ansonsten kann man dem Beweis von Lemma (1.12) nicht folgen, da die dort konstruierten Maße m_n außer in trivialen Fällen nie analytisch sind: ein analytisches Maß $\neq 0$ kann auf keiner Menge positiven Lebesgue-Maßes identisch verschwinden (Satz (2.3)). Vielmehr folgt der Beweis aus Satz (2.9), also letztlich aus dem Satz von F. und R. Nevanlinna:

$$Y \text{ aRNP} \xLeftrightarrow[(2.10)] H^1(Y) = \mathbb{H}^1(Y) \xLeftrightarrow[(2.9)] H^\infty(Y) = \mathbb{H}^\infty(Y) \xLeftrightarrow[(2.7)]$$

Gelte nun die in 4° angegebene Bedingung und sei $f \in H^\infty(Y)$, o.B.d.A.

$\|f\|_\infty \leq 1$. Nach Satz (2.5) ist $f = P[\varphi]$ für ein $\varphi \in L_{Y,a}^\infty(X', X)$,

$\|\varphi\|_\infty = \|f\|_\infty$. Dann ist $d\mu := \varphi d\lambda \in M_a(Y)$ und für $E \in \Sigma$:

$$\|\mu(E)\| = \left\| \int_E \varphi d\lambda \right\| = \left\| \int_T \chi_E \varphi d\lambda \right\| \leq \|\chi_E\|_1 \|\varphi\|_\infty \leq \lambda(E).$$

Nach Voraussetzung (und Zusatz) $\exists \psi \in L^\infty(Y)$ mit $d\mu = \psi d\lambda \Rightarrow$
 $f = P[d\mu] = P[\psi] \in \mathcal{H}^\infty(Y)$, q.e.d.

Um später leichter zitieren zu können, stelle ich die Informationen der Abschnitte (2.7) - (2.10) zu einer Übersicht zusammen:

(2.11) Zusammenstellung: Sei Y Banachraum. Äquivalent zur arNP für Y ist jede der folgenden Aussagen:

$$1^\circ \forall p \in [1, \infty] \forall f \in H^p(Y) \exists \varphi \in L_a^p(Y) : f = P[\varphi] = C[\varphi]$$

$$1^* \exists p \in [1, \infty] \forall f \in H^p(Y) \exists \varphi \in L^p(Y) : f = P[\varphi]$$

$$2^\circ \forall p \in [0, \infty] \forall f \in H^p(Y) \exists \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) \text{ f.ü. } (\theta)$$

$$2^* \exists p \in [0, \infty] \forall f \in H^p(Y) \exists \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) \text{ f.ü. } (\theta)$$

$$3^\circ \forall p \in (0, \infty) \forall f \in H^p(Y) \exists \lim_{r \rightarrow 1} f_r \text{ in } L^p(Y)$$

$$3^* \exists p \in (0, \infty) \forall f \in H^p(Y) \exists \lim_{r \rightarrow 1} f_r \text{ in } L^p(Y).$$

Das folgende Beispiel findet sich in fast jeder Arbeit über vektorwertige H^p -Funktionen. Die früheste mir bekannte Quelle ist [29 ex.3].

(2.12) Beispiel: Sei $f: D \rightarrow c_0$, $f(z) := (z^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Offenbar ist $f \in H^\infty(c_0)$. Komponentenweise (und das heißt wegen der Beschränktheit: schwach* in l^∞) ist

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0} \notin c_0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T},$$

also existiert $f^*(e^{i\theta})$ für kein θ auch nur schwach in c_0 .

Insbesondere hat c_0 die arNP nicht, und damit auch kein Banachraum, der c_0 enthält (wegen Corollar (2.10)2°).

Offensichtlich existiert $f^*(e^{i\theta})$ auch für kein θ schwach in l^∞ (da f c_0 -wertig und $c_0 \subset l^\infty$ schwach abgeschlossen). Dies zeigt,

daß 4. Théorème 1° in [34 p.253] falsch ist. Andererseits existiert

sogar der unrestringierte $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0}$ schwach* in l^∞
 $\forall \theta \in T$.

Sei nun $1 \leq p < \infty$ fest. Faßt man f auf mit Werten in l^p , so liegt der komponentenweise radiale Limes $f^*(e^{i\theta}) = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0}$ für kein θ in l^p , sodaß also $f^*(e^{i\theta})$ für kein θ auch nur schwach* in l^p existiert. Da l^p die RNP hat, folgt aus (2.11) (und Corollar (2.10)^{1°}): $f \notin N(l^p)$, was sich natürlich auch leicht direkt nachrechnen läßt.

Obwohl c_0 (mit dieser Funktion) sicher das einfachste Beispiel eines Raums ohne aRNP ist, ist es nicht das historisch erste.

Ryan [64 p.570f.] gibt folgendes Beispiel:

H = separabler Hilbertraum mit Basis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $P_n \in L(H)$,
 $P_n(\sum_{m=0}^{\infty} x_m e_m) := x_n e_n$, $f: D \rightarrow L(H)$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$; $f \in H^\infty(L(H))$.

$\hat{L}(H)$ ist Dual von $H \hat{\otimes} H$; f ist also gemäß Satz (2.5) gleich

$P[\varphi]$ für ein $\varphi \in L^\infty(L(H), H \hat{\otimes} H)$, und zwar ist "symbolisch"

$$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \text{ d.h. für } x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \in H: \varphi(e^{i\theta})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} x_n e_n.$$

Ryan zeigt nun, daß φ nicht norm-meßbar ist. Da $H \hat{\otimes} H$ separabel ist, ist $\varphi \in L^\infty(L(H), H \hat{\otimes} H)$ als Funktion f.ü. eindeutig bestimmt, also $\varphi \in L^\infty(L(H), H \hat{\otimes} H) \setminus L^\infty(L(H))$. Damit ist f nicht Poisson-Integral einer $L^\infty(L(H))$ -Funktion, d.h. $L(H)$ hat die aRNP nicht.

Statt zu zeigen, daß φ nicht norm-meßbar ist, ist es einfacher, sich zu überlegen [42 ex.1.1], daß f in keinem Randpunkt einen radialen Limes in der Norm von $L(H)$ hat: Man sieht leicht, daß

$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = \varphi(\theta)$ in der starken Operatortopologie ist. Außerdem

ist für alle $z \in D$ $f(z)$ gleichmäßiger Limes von endlichdimensionalen Operatoren, also $f(z) \in K(H) \forall z \in D$. Dagegen ist für alle $\theta \in T$ $\varphi(e^{i\theta})$ unitärer Operator, also nicht kompakt, weswegen $f(re^{i\theta})$ nicht uniform gegen $\varphi(e^{i\theta})$ konvergieren kann.

So gesehen, stellt sich heraus, daß das zunächst komplizierter aussehende Beispiel von Ryan genau obiges c_0 - l^∞ -Beispiel ist, durch folgendes kommutative Diagramm von Isometrien in die $K(H)$ - $L(H)$ -Situation übertragen:

$$\begin{array}{ccccccc} e_n \in c_0 & \hookrightarrow & l^\infty & \ni & (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_n(K(H)) & \hookrightarrow & L(H) & \ni & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n & (\Sigma \text{ in der starken Operator-} & \text{topologie}) \end{array}$$

(Dabei beachte man, daß in $L(H)$ gilt: $l^\infty \cap K(H) = c_0$.)

Das Beispiel illustriert gut die folgenden Sätze.

(2.13) Schwache Limiten

Satz: Hat $f \in N(Y)$ f.ü. schwache radiale Limiten, so auch f.ü. starke nichttangentielle Limiten.

Beweis: Nach Satz (2.9) ist $f = \frac{g}{h}$, $g \in H^\infty(Y)$, $h \in H^\infty$ ohne Nullstelle.

h hat f.ü. nichttangentielle Limiten $\neq 0 \Rightarrow$

g hat f.ü. schwache radiale Limiten $\xRightarrow{(1.13)}$

g hat f.ü. starke nichttangentielle Limiten $\Rightarrow$

f hat f.ü. starke nichttangentielle Limiten.

Bemerkung: Aus [21 thm.1.7] folgt folgende Verbesserung: Hat $f \in N(Y)$ f.ü. schwache radiale Limiten auf einer Menge $E \subset T$ positiven Maßes, so auch f.ü. starke nichttangentielle Limiten auf E .

(2.14) Schwach*-Limiten

Danilevich [21 thm.1.4] zeigte für separable tonnelierte Fréchet-räume E , daß jedes $f \in N(E')$ f.ü. nichttangentielle Limiten bzgl.

$\sigma(E', E)$ besitzt. Sein Beweis ist kompliziert; zumindest für

Banachräume ist das doch sehr viel einfacher (vgl. Beweis von

Satz (1.14)).

Satz: Sei X separabel, $f \in N(X') \Rightarrow f^*(e^{i\theta}) := \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$ existiert f.ü.

bzgl. $\sigma(X', X)$.

War $f \in H_a^p(X')$, $1 \leq p \leq \infty$, so ist $f^* \in L_a^p(X', X)$ und $f = P[f^*]$.

Beweis: 1. Aussage: Wie der Beweis des letzten Satzes, mit Satz (1.15) anstelle der dortigen Voraussetzung.

2. Aussage: Sei $f = P[\varphi]$, $\varphi \in L_a^p(X', X)$ (Satz (2.5)). Nach Satz (1.14) ist $f^* = \varphi$ f.ü., q.e.d.

(2.15) Operatorwertige H^p -Funktionen

Analog zu Satz (1.16) gilt die folgende Verallgemeinerung der

1. Aussage des letzten Satzes:

Satz: Sei X separabel, Y habe $aRNP$, und sei $f \in N(L(X, Y))$.

Dann hat f f.ü. nichttangente Limiten in der starken Operator-topologie.

Beweis: Mittels (2.8) Corollar 2 geht der Beweis wörtlich wie der von Satz (1.16). Man kann auch o.B.d.A. $f \in H^\infty(L(X, Y))$ annehmen (wegen Satz (2.8)); dadurch vereinfacht sich der Beweis etwas, weil man jetzt wegen der (globalen) Beschränktheit von f auf die Nullmenge N' verzichten kann.

Über operatorwertige H^p -Funktionen läßt sich natürlich sehr viel mehr sagen (und fragen), s. [64], [42], [18], [70], [54], [55], [74]. Naturgemäß gehen die diesbezüglichen Fragestellungen in eine andere, operatortheoretische Richtung, die nicht das Schwergewicht dieser Arbeit bilden soll.

Zum Schluß dieses Paragraphen zeige ich noch, daß man die Existenzmenge von Randwerten ziemlich willkürlich vorschreiben kann.

(2.16) Beispiel: Sei $h(z) := (1-z)^i = e^{i \log(1-z)}$ ($z \in D$),

wobei $\log$ der Hauptzweig sei, $\log w = \ln |w| + i \arg w$, $-\pi < \arg w < \pi$.

$|h(z)| = e^{-\arg(1-z)} \Rightarrow |h(z)| \leq e^{\pi/2}$, insbesondere $h \in H^\infty$.

Offenbar existiert $\lim_{r \rightarrow 1} h(r)$ nicht, aber (unrestringiert)

$h(e^{i\theta}) := \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} h(z) = (1 - e^{i\theta})^i$ gleichmäßig in $\delta \leq |\theta| \leq \pi \quad \forall \delta > 0$

(h ist ja in $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$ holomorph).

Sei nun $E \subset T$ beliebig und $f: D \rightarrow l^\infty(E) = l^1(E)'$, $f(z) := (h(e^{-i\theta} z))_{\theta \in E}$.

f ist beschränkt durch $\|h\|_\infty$, und deshalb folgt aus der koordinatenweisen Holomorphie auch die Holomorphie von f , i.e. $f \in H^\infty(l^\infty(E))$.

Behauptung: $1^\circ \theta \in E \Rightarrow \sigma^* \text{-} \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiert nicht

$2^\circ \theta \notin \bar{E} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$ existiert (stark, unrestringiert) ($\bar{} := \text{Abschluß}$)

$3^\circ \theta \in \bar{E} \setminus E \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiert σ^* , aber nicht stark.

Beweis: 1° ist klar wegen $f(re^{i\theta})_\theta = h(e^{-i\theta} re^{i\theta}) = h(r)$.

2° Sei $\theta_0 \notin \bar{E}$, dann ist $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} f(z) = (h(e^{i(\theta_0 - \theta)}))_{\theta \in E}$:

Es gibt $\delta > 0$ so daß $|\theta - \theta_0| \geq \delta \quad \forall \theta \in E \Rightarrow$

$$\|f(z) - (h(e^{i(\theta_0 - \theta)}))_{\theta \in E}\|_\infty = \sup_{\theta \in E} |h(e^{-i\theta} z) - h(e^{i(\theta_0 - \theta)})|$$

$$\leq \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |h(\underbrace{e^{it} z e^{-i\theta_0}}_{\xrightarrow{z \rightarrow e^{i\theta_0}} e^{it}}) - h(e^{it})| \xrightarrow{z \rightarrow e^{i\theta_0}} 0.$$

3° Zunächst existiert für $\theta_0 \notin E \quad \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) = (h(e^{i(\theta_0 - \theta)}))_{\theta \in E}$

koordinatenweise, also wegen Beschränktheit schwach*.

Aber für $\theta_0 \in \bar{E}$ existiert der Limes nicht stark: das würde bedeuten

$$\sup_{\theta \in E} |h(re^{i(\theta_0 - \theta)}) - h(e^{i(\theta_0 - \theta)})| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0, \text{ was nicht der Fall ist:}$$

Sei dazu o.E. $\theta_0 = 0$, dann ist zu widerlegen:

$$\sup_{\theta \in E} |h(re^{-i\theta}) - h(e^{-i\theta})| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0.$$

Es ist $h(z) = e^{i \log(1-z)} = e^{-\arg(1-z)} e^{i \ln|1-z|}$, also

$e^{-\pi/2} \leq |h(z)| \leq e^{\pi/2}$. Es genügt daher zu zeigen:

$$(\#) \quad \forall R < 1 \exists r \geq R \exists \theta \in E: \ln|1 - re^{-i\theta}| = \pi + \ln|1 - e^{-i\theta}|.$$

Denn dann liegen sich $h(re^{-i\theta})$ und $h(e^{-i\theta})$ diametral gegenüber im Kreisring $e^{-\pi/2} \leq |w| \leq e^{\pi/2} \Rightarrow$

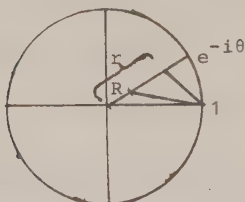
$$|h(re^{-i\theta}) - h(e^{-i\theta})| \geq 2e^{-\pi/2}, \text{ q.e.d.}$$

Es bleibt (#) zu zeigen. Die Gleichung in (#) ist äquivalent zu:

$$c(r, \theta) := \frac{|1 - e^{-i\theta}|}{|1 - re^{-i\theta}|} = e^{-\pi}.$$

Es gilt: $r < 1$ fest $\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} c(r, \theta) = c(r, 0) = 0$.

$\theta \neq 0$ fest $\Rightarrow c(\cdot, \theta)$ stetig in $[0, 1]$, $c(1, \theta) = 1$.



Damit: Sei $R < 1$ gegeben. Wähle $\theta \in E$ mit $c(R, \theta) \leq e^{-\pi}$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $r \in [R, 1]$ mit $c(r, \theta) = e^{-\pi}$, q.e.d.

[Geometrisch läuft hier folgendes ab: Bei festem $R < 1$ kann man durch Wahl eines betragsmäßig genügend kleinen $\theta (\in E)$ $c(r, \theta)$ beliebig klein machen. Hält man nun θ fest, so kann man durch Wahl eines genügend großen $r < 1$ $c(r, \theta)$ wieder beliebig "groß" machen (d.h. beliebig nahe an 1 bringen).]

Es ist klar, daß man die Konstruktion auch in dem von E unabhängigen Banachraum $l^\infty(T)$ durchführen kann: Sei zu gegebenem $E \subset T$ $j_E: l^\infty(E) \hookrightarrow l^\infty(T)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_E \circ f \in H^\infty(l^\infty(T))$ und hat auch die Eigenschaften $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, wie man leicht verifiziert.

Spezialisiert man $E := T$, so erhält man:

(2.17) Beispiel: Sei $h \in H^\infty$ so daß $\lim_{r \rightarrow 1} h(r)$ nicht existiert.

Sei $f: D \rightarrow l^\infty(T)$, $f(z) := (h(e^{-i\theta}z))_{\theta \in T} \Rightarrow$

$f \in H^\infty(l^\infty(T))$, $\sigma^*\text{-}\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiert für kein θ .

(Im Beweis von (2.16) Behauptung 1° hat man von $h \in H^\infty$ nur die Nichtexistenz von $\lim_{r \rightarrow 1} h(r)$ gebraucht.)

Offenbar kann man f auch auffassen als $f: D \rightarrow C(T)$,
 $f(z)(e^{i\theta}) := h(e^{-i\theta}z)$. In (fast) dieser Form stammt das Beispiel
 von Grossetête [34 2.ex.1]. Da $C(T)$ kein Dualraum ist, kann man
 aber nicht von schwach*-Limiten sprechen. "Dafür" ist für kein
 $\theta \in T$ das Netz $(f(re^{i\theta}))_{r < 1}$ ein schwaches Cauchynetz (i.e.
 $(f(re^{i\theta}))_{r < 1}$ konvergiert nicht schwach* im Bidual).

Ein "natürlicheres" Beispiel einer solchen Funktion ($\in H^\infty(L^1/H^1_0)$)
 kommt in §3.

§3: Die analytische Radon-Nikodým-Eigenschaft (aRNP)

In ihrer grundlegenden Arbeit [16] zeigen Bukhvalov und Danilevich, daß jeder komplexe Banachverband, der c_0 nicht enthält (also insbesondere jeder $L^1(\mu)$ -Raum), die aRNP besitzt. Dies ist natürlich insofern interessant, als z.B. L^1 die RNP nicht hat [DU III.1.2]. Ihr Beweis ist schwer lesbar. Ich erreiche dieses Resultat in 2 Schritten: Zunächst zeige ich die aRNP für $L^1(\mu)$, oder etwas allgemeiner: für $L^p(\mu, X)$, falls X die aRNP hat und $1 \leq p < \infty$ ist (3.1). Der Fall eines Banachverbands, der c_0 nicht enthält, folgt später (3.5) aus dem Resultat für $L^1(\mu)$ mittels der Methode der Semi-Einbettungen. $S: X \rightarrow Y$ heißt Semi-Einbettung, falls S injektiv und $S(B_X) \subset Y$ abgeschlossen ist. Genauso wie für die RNP [11 thm.1.1] gilt für die aRNP (3.4): X separabel, Y aRNP $\Rightarrow X$ aRNP. Sei nun X ein (o.B.d.A. separabler) Banachverband, der c_0 nicht enthält, so ist bekannt, daß X in einen geeigneten $L^1(\mu)$ -Raum semi-einbettet, sodaß also X die aRNP hat. Es sei nicht verschwiegen, daß die Semi-Einbettung von X in $L^1(\mu)$ genau die Darstellung von X als Köthe-Funktionsraum [LT II 1.b.14] ist, die auch Bukhvalov und Danilevich verwenden. Trotzdem ist es viel leichter zu sehen, daß diese Darstellung eine Semi-Einbettung ist [32 rem. p.323], als mit ihr die aRNP für X direkt zu zeigen.

Andererseits sind die Räume, die c_0 enthalten, nicht die einzigen Räume ohne aRNP. L^1/H_0^1 ist schwach folgenvollständig [Pe cor.8.1(a)] und hat die aRNP nicht [16 prop.4], (3.3). Anscheinend sind c_0 und L^1/H_0^1 und ihre Oberräume die einzigen Räume, von denen bekannt ist, daß sie die aRNP nicht haben. Der naheliegende Kandidat, der zu untersuchen wäre, ist das Dual JT' (oder Prädual B) des James tree space JT [46]. Leider kann man zeigen, daß es unmöglich ist, hier mit der Methode der Semi-Einbettungen zu einem Ergebnis zu kommen (3.12).

Analog zur RNP [DU III.1.5] hat auch die aRNP eine operator-theoretische Charakterisierung (3.8); dabei übernimmt L^1/H_0^1 die Rolle von L^1 . Wie in der L^1 -Situation sind schwach kompakte Operatoren $L^1/H_0^1 \rightarrow X$ Riesz-darstellbar und diese sind Dunford-Pettis, und beide Umkehrungen sind falsch (3.10).

Es ist nicht bekannt, ob die aRNP eine 3-Raum-Eigenschaft wie die RNP ist [DU p.211]. Ein Resultat in dieser Richtung enthält (3.11).

Am Ende des Paragraphen stelle ich einige Räume mit bzw. ohne aRNP in 2 Listen zusammen.

Über die aRNP gibt es außer [16] noch wenig Literatur. In den Preprints [24], [25] hat Dowling unabhängig von mir einige meiner Resultate dieses Paragraphen erzielt. Aurich [3] stellt einen Zusammenhang her zur Existenz von beschränkten holomorphen Einbettungen der Kreisscheibe in einen Banachraum. In dem Preprint [26] charakterisiert Edgar die aRNP durch die F.-ü.-Konvergenz von L^1 -beschränkten "analytischen" Martingalen.

(3.1) Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ beliebiger (positiver) Maßraum und $1 \leq p < \infty$. Sei X ein Banachraum mit aRNP. Dann hat auch $Y := L^p(\mu, X)$ die aRNP.

Corollar 1: $L^p(\mu)$ hat die aRNP, für jedes (positive) Maß μ , $1 \leq p < \infty$.
(Setze $X := \mathbb{C}$.) (Für $1 < p < \infty$ weiß man dies schon wegen $RNP \Rightarrow aRNP$.)

Corollar 2: X aRNP $\Rightarrow H^p(X)$ aRNP, $1 \leq p < \infty$.
(X aRNP $\Rightarrow H^p(X) = \mathbb{H}^p(X) \hookrightarrow L^p(X) = L^p(\lambda, X)$ aRNP.)

Beweis des Satzes: Die Idee des Beweises ist, etwas versteckt, im Beweis von [16 thm.1]. Sie besteht darin, daß man durch "Einsetzen" von (fast allen) Punkten $\omega \in \Omega$ eine Funktion $f(\cdot)(\omega) \in H^p(X)$ bekommt (falls $f \in H^p(Y)$ war), auf die man die Voraussetzung "X aRNP" anwenden kann.

Zunächst kann man o.B.d.A. annehmen, daß $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ -finit ist ((2.10) Corollar 3°, [DS III.8.5]).

Um die Behauptung zu zeigen, ist es nach (2.11) hinreichend (und notwendig), zu beweisen: $\forall f \in H^p(Y)$ ist $(f_r)_{r < 1}$ Cauchynetz in $L^p(Y)$. Dabei ist wie immer $f_r(t) := f(re^{it})$.

Sei also $f \in H^p(Y)$ gegeben mit in D absolut konvergenter Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in Y = L^p(\mu, X) \Rightarrow$$

$$\forall r < 1: \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_{Y=L^p(\mu, X)} r^n < \infty \Rightarrow$$

$$\forall r < 1: \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\|a_n(\cdot)\|_X}_{\in L^p(\mu)} r^n \text{ konvergiert (absolut) in } L^p(\mu) \text{ und}$$

μ -f.ü. punktweise gegen die gleiche $L^p(\mu)$ -Funktion, ist also μ -f.ü. endlich ($r < 1$ fest). Durch Wahl einer Folge $r_k \nearrow 1$ erhält man:

Für μ -f.a. $\omega \in \Omega$ und alle $r < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(\omega)\|_X r^n < \infty$,

d.h. für μ -f.a. $\omega \in \Omega$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega) z^n$ analytische Funktion
 $f(\cdot)(\omega): D \rightarrow X$.

Behauptung 1: $N_p(\omega) := \|f(\cdot)(\omega)\|_{H^p(X)}$ ist bzgl. ω p -fach integrierbar, insbesondere μ -f.ü. endlich, d.h. $f(\cdot)(\omega) \in H^p(X)$ für μ -f.a. $\omega \in \Omega$.

Beweis: Zunächst ist für festes $r < 1$ $f_r(\theta)(\omega)$ meßbar bzgl. der Produktvariablen (θ, ω) :

Für fast alle ω und alle θ (also auch für fast alle (θ, ω)) ist $f_r(\theta)(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega) r^n e^{in\theta}$ konvergent in X (nach obigem), also meßbar bzgl. (θ, ω) , denn offenbar ist ja $(\theta, \omega) \rightarrow a_n(\omega) e^{in\theta}$ meßbar.

Nach dem Satz von Fubini ist auch die μ -f.ü. definierte Funktion

$\omega \mapsto N_p(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\int_0^{2\pi} \|f_r(\theta)(\omega)\|_X^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p}$ meßbar und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_p^p(\omega) d\omega & \stackrel{\text{mon.Kvz.}}{=} \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Omega} \int_0^{2\pi} \|f_r(\theta)(\omega)\|_X^p \frac{d\theta}{2\pi} d\omega \\ & \stackrel{(2.4) 2^\circ}{=} \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \|f_r(\theta)(\omega)\|_X^p d\omega \frac{d\theta}{2\pi} \\ & \stackrel{\text{Fubini}}{=} \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \|f_r(\theta)\|_{Y=L^p(\mu, X)}^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ & = \|f\|_{H^p(Y)}^p < \infty, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

(#) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Da } X \text{ die aRNP hat, existiert nach (2.11)} \\ \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\cdot)(\omega) \text{ in } L^p(\lambda, X) \text{ für } \mu\text{-f.a. } \omega \in \Omega. \end{array} \right.$

Behauptung 2: $(f_r)_{r < 1}$ ist Cauchynetz in $L^p(\lambda, Y)$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \|f_r - f_s\|_{L^p(\lambda, Y)}^p &= \int_0^{2\pi} \|f_r(\theta) - f_s(\theta)\|_{Y=L^p(\mu, X)}^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \|f_r(\theta)(\omega) - f_s(\theta)(\omega)\|_X^p d\omega \frac{d\theta}{2\pi} \\ \text{Fubini} \quad &= \int_{\Omega} \int_0^{2\pi} \|f_r(\theta)(\omega) - f_s(\theta)(\omega)\|_X^p \frac{d\theta}{2\pi} d\omega \\ &= \int_{\Omega} \|f_r(\cdot)(\omega) - f_s(\cdot)(\omega)\|_{L^p(\lambda, X)}^p d\omega \end{aligned}$$

majorisierte Konvergenz $\xrightarrow{r, s \rightarrow 1} 0,$

denn $\|f_r(\cdot)(\omega) - f_s(\cdot)(\omega)\|_{L^p(\lambda, X)} \xrightarrow{r, s \rightarrow 1} 0$ nach (#),

mit (nach 1. Behauptung) L^p -Majorante $2N_p(\omega)$ für f.a. ω ,

da $\|f_r(\cdot)(\omega)\|_{L^p(\lambda, X)} \leq \|f(\cdot)(\omega)\|_{H^p(X)} = N_p(\omega)$. Q.e.d.

Anmerkung: Genauso kann man mittels Satz (1.11) und (1.12) den bekannten Satz [DU V.4.1] beweisen:

$X \text{ RNP}, 1 < p < \infty \Rightarrow L^p(\mu, X) \text{ RNP}.$

Man sieht auch gut, wo in diesem Fall der Beweis für $p=1$ scheitert (und in beiden Fällen für $p=\infty$): nämlich in (#).

(3.2)

Nach (3.1) Corollar 2 gilt: $Y \text{ aRNP}, 1 \leq p < \infty \Rightarrow H^p(Y) \text{ aRNP}.$

Andererseits gilt nach dem eben zitierten Satz:

$Y \text{ RNP}, 1 < p < \infty \Rightarrow H^p(Y) \text{ RNP}$

(denn: $Y \text{ RNP} \Rightarrow Y \text{ aRNP} \Rightarrow H^p(Y) = \mathbb{H}^p(Y) \hookrightarrow L^p(Y) \text{ RNP}.$

Offen bleibt die Frage: $Y \text{ RNP} \stackrel{?}{\Rightarrow} H^1(Y) \text{ RNP}.$

Ich kann das für bestimmte Spezialfälle zeigen, z.B. falls Y separabler Dualraum ist. Dann ist nämlich auch $H^1(Y)$ separabler Dualraum, hat also RNP. Dazu einige Vorbereitungen.

Sei $\varphi \in C(X) = C(T, X)$, $f := P[\varphi]$ und $F: \bar{D} \rightarrow X$, $F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D \\ \varphi(z), & z \in T \end{cases}$.

Dann ist F stetig in $\bar{D}$ (diese Aussage kann man auf den skalaren Fall zurückführen durch

$$\|f(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})\| \leq \int_0^{2\pi} p_r(\theta-t) \|\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{i\theta})\| \frac{dt}{2\pi};$$

$\|\varphi(\cdot) - \varphi(e^{i\theta})\|$ ist stetig auf T mit Wert 0 in $e^{i\theta}$)

und harmonisch in D .

Sei umgekehrt $F: \bar{D} \rightarrow X$ stetig und $f := F|_D$ harmonisch. Dann ist

$\varphi := F|_T \in C(T, X)$ und $f = P[\varphi]$ nach Satz (1.11). Weiter ist offenbar

$$\|F\|_{\infty} = \|\varphi\|_{\infty} = \|\varphi\|_{\infty} \quad (\text{Satz (1.5)}). \quad \text{M.a.W.:}$$

$$C(T, X) \rightarrow \{F: \bar{D} \rightarrow X: F|_D \text{ harmonisch}\}$$

$$\varphi \mapsto P[\varphi]\chi_D + \varphi\chi_T$$

$$F|_T \leftarrow F$$

ist isometrischer Isomorphismus.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von F auf $\bar{D}$ geht in obiger

Situation $f_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} \varphi$ gleichmäßig auf T , d.h. in $C(T, X)$. Daher sind

die trigonometrischen Polynome $\sum_{n=-N}^N x_n e^{in\theta}$ dicht in $C(T, X)$,

denn für $r < 1$ fest ist $f_r(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{int}$ mit gleichmäßig konvergenter Reihe (Lemma (1.2)).

Sei nun $A(X) := \{F: \bar{D} \rightarrow X \text{ stetig: } F|_D \text{ analytisch}\}$ die X -wertige Disk-"Algebra". Unter obiger Identifizierung ist

$$A(X) = \{\varphi \in C(X): \hat{\varphi}(n) = 0 \quad \forall n < 0\} \quad (\text{Lemma (2.2)}^2).$$

Wie eben sieht man, daß die "analytischen Polynome" $\sum_{n=0}^N x_n e^{in\theta}$ dicht in $A(X)$ liegen.

$$\text{Sei } A_0(X) := \{F \in A(X): F(0) = 0\} = \{\varphi \in A(X): \hat{\varphi}(0) = 0\}$$

$$= \{\varphi \in C(X): \hat{\varphi}(n) = 0 \quad \forall n \leq 0\}$$

(es ist klar, daß $F(0) = P[\varphi](0) = \int_T \varphi d\lambda = \hat{\varphi}(0)$).

Dann liegen die analytischen Polynome vom Typ $\sum_{n=1}^N x_n e^{in\theta}$ dicht

in $A_0(X)$. Daraus folgt, daß der Annulator von $A_0(X) \subset C(X)$ in

$C(X)' = M(X')$ genau $M_a(X')$ ist. Nach (dem Beweis von) Satz (2.5)

(1. Fall) ist $M_a(X') = H^1(X')$ (kanonisch isometrisch isomorph).

Damit ist gezeigt:

Satz: Für jeden Banachraum X ist $(C(X)/A_0(X))' = H^1(X')$.

Corollar: Y separabler Dualraum (hat also RNP) $\Rightarrow$

$H^1(Y)$ separabler Dualraum, hat also RNP.

Das Corollar folgt aus dem Satz und dem folgenden

Lemma: Y Banachraum, $1 \leq p < \infty \Rightarrow$ die trigonometrischen Polynome

$\sum_{n=-N}^N y_n e^{in\theta}$ liegen dicht in $L^p(Y)$, die "analytischen Polynome"

$\sum_{n=0}^N y_n e^{in\theta}$ in $H^p(Y) \subset L^p(Y)$. Insbesondere sind $L^p(Y)$ und $H^p(Y)$

separabel, falls Y separabel ist.

Beweis: 1. Aussage für $L^p(Y)$: Sei $\phi \in L^p(Y)$ und $f := P[\phi] \in H^p(Y)$.

Nach Satz (1.11) gilt $f_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} \phi$ in $L^p(Y)$, und f_r ist sogar gleich-

mäßiger Limes der Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n)r^{|n|} e^{in\theta}$ (Lemma (1.2)), woraus

die Behauptung folgt. Analog für $H^p(Y)$. Es ist klar, daß die

2. Aussage aus der 1. folgt.

Nach dem Corollar hat für $1 \leq p < \infty$ $H^1(l^p)$ die RNP. Gleiches gilt

dann auch für $H^1(l^p(\Gamma))$, Γ beliebige Menge. Dies folgt wegen

der separablen Determiniertheit der RNP [DU III.3.2] aus der

folgenden

Notiz: $1 \leq p \leq \infty$, $Z \subset H^p(Y)$ separabel $\Rightarrow \exists Y_0 \subset Y$ separablen Unterbanachraum mit $Z \subset H^p(Y_0)$.

Beweis: Sei $A \subset Z$ abzählbar und dicht. Da jedes $f \in H^p(Y)$ separablen Wertebereich hat, gibt es einen separablen Unterbanachraum $Y_0 \in Y$

mit $\forall f \in A: f \in H^p(Y_0)$. Sei nun $f \in Z \Rightarrow \exists f_n \in A: f_n \rightarrow f$ in $H^p(Y) \xrightarrow{(1.4)5^\circ}$

$f_n \rightarrow f$ punktweise $\Rightarrow f \in H^p(Y_0)$.

Nach diesem Exkurs in die RNP zurück zur arNP. Nach Beispiel (2.12) kann ein Raum mit arNP c_0 nicht enthalten. Die Umkehrung ist falsch; nicht einmal die schwache Folgenvollständigkeit ist hinreichend für die arNP, wie der folgende Satz zeigt (denn L^1/H_0^1 ist schwach folgenvollständig ([Pe cor.8.1(a)], [G thm.V.5.2])). Er wird in [16 prop.4] A. B. Aleksandrov zugeschrieben.

(3.3) Satz: L^1/H_0^1 hat die arNP nicht. Genauer:

$\exists f \in H^\infty(L^1/H_0^1)$ so daß für kein $\theta \in T$ das Netz $(f(re^{i\theta}))_{r < 1}$ ein schwaches Cauchynetz in L^1/H_0^1 ist.

Beweis: Man braucht, daß $(L^1/H_0^1)' = H^\infty$ ist [Ho p.137].

Sei $F: D \rightarrow L^1$, $F(z)(e^{it}) := \frac{e^{it}}{e^{it} - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int}$.

Für $R < 1$ fest konvergiert die Reihe gleichmäßig in $|z| \leq R$, $t \in T$.

Also konvergiert die Reihe in L^1 , gleichmäßig in $|z| \leq R$. F ist also analytisch in D .

Sei $q: L^1 \rightarrow L^1/H_0^1$ die kanonische Quotientenabbildung und

$f := q \circ F: D \rightarrow L^1/H_0^1$, dann ist auch f holomorph.

$$\begin{aligned} f \in H^\infty(L^1/H_0^1): \|f(z)\| &= \sup_{h \in B_{H^\infty}} |\langle f(z), h \rangle| = \sup_{h \in B_{H^\infty}} \left| \int F(z)(e^{it}) h(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &= \sup_{h \in B_{H^\infty}} \left| \int \frac{e^{it}}{e^{it} - z} h(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \right| = \sup_{h \in B_{H^\infty}} |h(z)| = 1 \end{aligned}$$

nach der Cauchy-Integralformel für $h \in H^\infty$.

$(f(re^{i\theta}))_{r < 1}$ ist kein schwaches Cauchynetz ($\theta \in T$ fest):

Wähle $h \in H^\infty$ so daß $\lim_{r \rightarrow 1} h(re^{i\theta})$ nicht existiert

(z.B. $h(z) := (1 - ze^{-i\theta})^{-1}$, vgl. Beispiel (2.16)).

Dann ist wie in der Rechnung eben

$$\langle f(re^{i\theta}), h \rangle = h(re^{i\theta}) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty, \text{ q.e.d.}$$

Es ist interessant, das Beispiel noch näher zu diskutieren.

Statt als Ausgangsfunktion $F: D \rightarrow L^1$ den Cauchykernel zu nehmen,

könnte man auch mit dem Poissonkern $G: D \rightarrow L^1$, $G(z)(e^{it}) := \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$

starten. Es ist nämlich für $z \in D$ fest:

$$\begin{aligned} G(z)(e^{it}) - F(z)(e^{it}) &= \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} - \frac{e^{it}}{e^{it}-z} = \frac{1-|z|^2-e^{it}(e^{-it}-\bar{z})}{|e^{it}-z|^2} \\ &= \frac{\bar{z}e^{it}-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} = \frac{\bar{z}(e^{it}-z)}{|e^{it}-z|^2} = \frac{\bar{z}}{e^{-it}-\bar{z}} = \frac{\bar{z}e^{it}}{1-\bar{z}e^{it}} \\ &= \text{Randwert der } H^1_0\text{-Funktion } \zeta \mapsto \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta}, \end{aligned}$$

d.h. $G(z) - F(z) \in H^1_0 \forall z \in D$, d.h. $f = qoF = qoG$.

Weder F noch G haben radiale Limiten in L^1 (sonst hätte ja f welche). Dies rührt daher, daß F zwar holomorph, aber nicht beschränkt ist, wogegen G zwar beschränkt ist (Poissonkern hat Integral 1), aber nicht holomorph (nur harmonisch), und L^1 hat eben nur die $aRNP$, nicht die RNP . Erst modulo H^1_0 wird F beschränkt (und bleibt trivialerweise holomorph) und G holomorph (und bleibt trivialerweise beschränkt), d.h. $f = qoF = qoG \in H^\infty(L^1/H^1_0)$.

Man kann auch das Maß $m \in M(L^1)$ mit $G = P[dm]$ direkt angeben. Es ist nichts anderes als das vertraute [DU III.1.2] absolutstetige $m \in M(L^1)$ ohne Radon-Nikodým-Ableitung: $m(E) = \chi_E$, $E \in \Sigma$.

Für $\varphi \in L^1(|m|) = L^1(\lambda)$ [loc.cit.] ist nämlich $\int_T \varphi dm = \varphi$, da dies für Treppenfunktionen φ trivial ist. Es folgt

$$P[dm](z) = \int_T \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} dm(t) = (e^{it} \mapsto \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}) = G(z),$$

und analog $C[dm](z) = F(z)$. Da $F \notin N(L^1)$ (sonst hätte ja F , also auch f f.ü. radiale Limiten), ist anders als im skalaren Fall [Pr II.5.1] das Cauchy-Integral eines Maßes von beschränkter Variation i.a. nicht in allen H^p -Klassen, $p < 1$. (Dies hängt mit der in §5 zu untersuchenden "analytischen Projektion" zusammen und ist durchaus typisch.)

m ist natürlich nicht analytisch, vielmehr ist

$$\hat{m}(k) = \int_T e^{-ikt} dm(t) = (t \mapsto e^{-ikt}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Aber $\hat{m}(k) \in H^1_O \forall k < 0$, d.h. $\mu := q \circ m$ ist analytisch, $\mu \in M_a(L^1/H^1_O)$,
und offenbar ist $f = q \circ G = q \circ P[dm] = P[d\mu]$.

Um direkt zu sehen, daß μ keine Radon-Nikodým-Ableitung hat
(dies ist dann ein alternativer Beweis der 1. Aussage des Satzes),
Nehme ich das Gegenteil an. Dann wäre der Operator

$$L^\infty \rightarrow L^1/H^1_O, \varphi \mapsto \int_T \varphi d\mu = \int_T \varphi dq \circ m = q\left(\int_T \varphi dm\right) \stackrel{\text{oben}}{=} q(\varphi)$$

kompakt [DU II.3.8.c] . Dies ist nicht der Fall:

Betrachte $\varphi_n \in B_{L^\infty}$, $\varphi_n(t) := e^{-int}$, $n \geq 0 \Rightarrow$ für $n \neq m$:

$$\|q(\varphi_n) - q(\varphi_m)\|_{L^1/H^1_O} = \sup_{h \in B_{H^\infty}} \left| \int (e^{-int} - e^{-imt}) h(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \right|$$

$$(h(e^{it}) := e^{int}) \geq \left| \int (e^{-int} - e^{-imt}) e^{int} \frac{dt}{2\pi} \right| = 1,$$

also hat $(q(\varphi_n))$ keine konvergente Teilfolge, q.e.d.

Wie schon Bukhvalov und Danilevich [16 thm.3] vermerken, folgen
aus dem aRNP-Verhalten von L^1 und L^1/H^1_O einige (bekannte) Aussagen
der isomorphen Banachraumtheorie. Ergänzend zu ihren Beobachtungen
kann man bemerken, daß sich auch der Satz von Newman [Ho p.154]
daraus ableiten läßt: H^1 ist in L^1 nicht komplementiert. Sonst
wäre natürlich auch H^1_O in L^1 komplementiert, also L^1/H^1_O isomorph
zu einem Unterraum von L^1 ; mit L^1 hätte dann auch L^1/H^1_O die aRNP,
Widerspruch. (Die stärkere Aussage: H^1 ist nicht isomorph zu
einem komplementierten Teilraum von L^1 [43 6.1 cor.1] kann man
aber daraus nicht folgern.)

Ähnlich wie die RNP ist die aRNP nicht nur invariant unter iso-
morphen Einbettungen, sondern auch unter Operatoren, die nur in
einem abgeschwächten Sinn "Einbettungen" sind.

(3.4) Definition: Sei $S: X \rightarrow Y$ stetig, linear und injektiv. S heißt

1° Semi-Einbettung $\Leftrightarrow SB_X$ ist abgeschlossen in Y

2° G_δ -Einbettung $\Leftrightarrow SK$ ist G_δ -Menge in $Y \quad \forall$ abgeschlossenen

beschränkten $K \subset X$

3° H_δ -Einbettung : $\overline{SC} \setminus SC$ ist abzählbare Vereinigung von abc^* -Mengen in Y , $\forall$ abc -Mengen $C \subset X$

4° Semi- H_δ -Einbettung : $\overline{SB}_X \setminus SB_X$ ist abzählbare Vereinigung von abc -Mengen in Y .

Über die Begriffe 1° - 3° und ihre Anwendung in der Banachraumtheorie hat sich in jüngster Zeit eine umfangreiche Literatur entwickelt ([47], [48], [11], [32], [30], [22], [31]). In ihr werden z.T. K in 2°, C in 3°, oder überhaupt X als separabel vorausgesetzt. Da diese Begriffe aber sowieso nur für separables X von Interesse sind (nur dieser Fall wird im folgenden vorkommen), spielt das keine große Rolle.

Lemma: Sei X separabel, $S: X \rightarrow Y$. Es gilt:

$$\text{Semi} \Rightarrow H_\delta \Rightarrow \text{Semi-}H_\delta$$

$$\Downarrow \\ G_\delta$$

Beweis: $\text{Semi} \Rightarrow G_\delta$: [11 prop. 1.8]

$\text{Semi} \Rightarrow H_\delta$: [31 prop. p. 73]

$H_\delta \Rightarrow \text{Semi-}H_\delta$: trivial

(Die 2. Aussage wird in [loc.cit.] nicht bewiesen. Da ich die Aussage nicht benötige, verzichte ich darauf, den Beweis nachzutragen. Ich brauche nur: " $\text{Semi} \Rightarrow \text{Semi-}H_\delta$ ", und das ist trivial.)

Satz: Sei $S: X \rightarrow Y$ Semi- H_δ -Einbettung, X separabel.

1° Sei $\mu \in M(X)$ mit $\|\mu(E)\| \leq \lambda(E) \quad \forall E \in \Sigma$. Hat $S\mu$ eine Bochner-integrierbare Dichte, so auch μ .

2° Sei $R: L^1 \rightarrow X$ stetiger linearer Operator. Ist SR Riesz-darstellbar, so auch R .

($R: L^1 \rightarrow X$ heißt Riesz-darstellbar $\Leftrightarrow \exists \psi \in L^\infty(X) : R\varphi = \int \varphi \psi d\lambda \quad \forall \varphi \in L^1$.)

* abc = abgeschlossen, beschränkt, konvex

Beweis: 1° In [31 thm.III.1] wird bewiesen: Falls eine H_δ -Einbettung $X \rightarrow l^2$ existiert, so hat X die RNP. Im Beweis wird genau die Behauptung 1° gezeigt. Ich führe ihn der Vollständigkeit halber aus.

Sei $\frac{0}{0} := 0$. $\{\frac{\mu(E)}{\lambda(E)} : E \in \Sigma\} \subset B_X \Rightarrow \{\frac{S\mu(E)}{\lambda(E)} : E \in \Sigma\} \subset SB_X$

$\Rightarrow$ (vgl. [DU p.81]) $\frac{dS\mu}{d\lambda}(t) \in \overline{SB}_X$ λ -f.ü.

Es gibt also ein Borel-meßbares $\psi: T \rightarrow \overline{SB}_X$ mit $dS\mu = \psi d\lambda$.

Der Kern des Beweises ist es, zu zeigen, daß $\psi(t) \in SB_X$ für f.a. $t \in T$.

Sei $\overline{SB}_X \setminus SB_X = \bigcup_n K_n$; K_n abc-Menge $\forall n$.

$T_n := \psi^{-1}(K_n) \in \Sigma \forall n$; zu zeigen $\lambda(T_n) = 0 \forall n$.

Annahme, $\lambda(T_n) > 0$ für ein n . Dann hat man einerseits

$\frac{\mu(T_n)}{\lambda(T_n)} \in B_X \Rightarrow \frac{S\mu(T_n)}{\lambda(T_n)} \in SB_X$, also $\notin K_n$. Andererseits

$\frac{S\mu(T_n)}{\lambda(T_n)} = \int_{T_n} \frac{\psi d\lambda}{\lambda(T_n)} \in K_n$ [DU II.2.8], Widerspruch.

Damit kann man natürlich auch $\psi: T \rightarrow SB_X$ (überall) annehmen.

Nach einem Satz von Lusin [Ha p.238] (X separabel!) ist

$S^{-1}: SB_X \rightarrow B_X$ Borel-meßbar, also auch $\varphi := S^{-1} \circ \psi: T \rightarrow B_X$. Wieder weil X separabel ist, ist $\varphi(\lambda-)$ meßbar [L M.11 p.233], also $\varphi \in L^\infty(X)$.

Sei $E \in \Sigma \Rightarrow \int_E S\varphi d\lambda = \int_E \varphi d\lambda = \int_E \psi d\lambda = S\mu(E) \Rightarrow (S \text{ injektiv})$

$d\mu = \varphi d\lambda$, q.e.d.

Anmerkung: Ist S Semi-Einbettung, so fällt der 1. Teil des Beweises weg, und den Satz von Lusin kann man durch ein elementares Argument ersetzen [11 thm.1.1']. In diesem Fall kann man auch auf Vektormaße verzichten und direkt zeigen:

$f \in h^\infty(X)$, $Sof \in h^\infty(Y) \Rightarrow f \in h^\infty(X)$.

Das ginge zwar im allgemeinen Fall auch, wäre aber im wesentlichen nur eine Verschleierung obigen Beweises.

2° folgt aus 1° via dem "Übersetzungslemma" [DU III.1.4].

Da man sowohl die RNP als auch die aRNP nur für Vektormaße μ mit $\|\mu(E)\| \leq \lambda(E) \quad \forall E \in \Sigma$ zu testen braucht (Lemma (1.12), Corollar (2.10)4°), hat man sofort das

Corollar: Sei X separabel, $S: X \rightarrow Y$ Semi- H_δ -Einbettung. Dann gilt:
 $Y \text{ RNP} \Rightarrow X \text{ RNP}; Y \text{ aRNP} \Rightarrow X \text{ aRNP}.$

Aus dem Corollar folgt, daß (z.B.) $C_0, C, L^1/H_0^1$ keine Semi- H_δ -Einbettung nach L^1 besitzen. Gleiches gilt bzgl. G_δ -Einbettung [11 prop.2.2], [32 cor.V.5.1]).

(3.5)

Als Anwendung zeige ich den Satz von Bukhvalov und Danilevich, wonach jeder komplexe Banachverband Z , der C_0 nicht enthält, die aRNP besitzt. Nach Reduktion auf den separablen Fall folgt dies aus der Tatsache, daß Z in einen geeigneten $L^1(\mu)$ -Raum semi-einbettet. Diese Tatsache ist aber leider strenggenommen nur für reelle Banachverbände bekannt. Es wäre ein langwieriges, wenn auch in jedem Schritt triviales Unterfangen, zu verifizieren, daß sich die reelle Argumentation praktisch wörtlich aufs Komplexe überträgt (insbesondere braucht man die komplexe Version von [LT II 1.b.14]). Ich schlage einen bequemeren Weg ein: Die Aussage für reelle Banachverbände benutzend, zeige ich, daß Z mit einer äquivalenten Norm in einen $L^1(\mu)$ -Raum semi-einbettet. Da die aRNP offenbar eine isomorphe Invariante ist, folgt daraus die aRNP für Z .

Ein komplexer Banachverband Z ist die Vektorraumkomplexifizierung $X \oplus iX$ eines reellen Banachverbands X , versehen mit dem Absolutbetrag $|x + iy| = \sup \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \leq 1\}$ und der Norm $\|z\|_Z = \|\cdot\|_X \quad (x, y \in X, z \in Z)$. (Das Supremum existiert in X [LT II p.42f.].) Aus der Definition folgt für $z = x + iy \quad (x, y \in X)$: $\sup \{|x|, |y|\} \leq |z| \leq |x| + |y|$, und daraus

$$\sup \{ \|x\|, \|y\| \} =: \|z\|_{\infty} \leq \|z\|_Z \leq \|z\|_1 := \|x\| + \|y\|.$$

Als Banachraum ist also Z "die" Banachraumkomplexifizierung von X (d.h. Z trägt die Produkttopologie).

Satz (Bukhvalov, Danilevich [16 thm.1]): Sei Z komplexer Banachverband, der c_0 nicht enthält (als Unterbanachraum). Dann hat Z die aRNP.

Beweis: Zunächst reduziere ich die Behauptung auf den separablen Fall. Nach Corollar (2.10)3° hat man die aRNP nur für separable Unterbanachräume $Z_0 \subset Z$ zu testen. Sei $Z = X \oplus iX$ wie oben.

Re, Im: $Z \rightarrow X$ stetig $\Rightarrow \exists X_0 \subset X$ separabel: $Z_0 \subset X_0 + iX_0$.

Nach [S II.exerc.5(e) p.143 und II.5.2 cor.1] ist der von X_0 in X erzeugte Unterbanachverband X_1 (= Abschluß des von X_0 erzeugten Untervektorverbands) separabel. Sei $Z_1 := X_1 \oplus iX_1$.

Offenbar gilt $Z_0 \subset Z_1$ und $Z_1 \not\subset c_0$ (als Unterbanachraum).

Allerdings hat man für $z = x + iy \in Z_1$ ($x, y \in X_1$) die nicht notwendig übereinstimmenden Absolutbeträge

$$|z|_Z = X - \sup \{ \alpha x + \beta y : \alpha^2 + \beta^2 \leq 1 \} \text{ und } |z|_{Z_1} = X_1 - \sup \{ \alpha x + \beta y : \alpha^2 + \beta^2 \leq 1 \}$$

mit zugehörigen Normen $\|z\|_Z = \| |z|_Z \|_X$ und $\|z\|_{Z_1} = \| |z|_{Z_1} \|_X$.

Diese sind aber nach obigem äquivalent (z.B. zu $\|z\|_{\infty} = \sup \{ \|x\|_X, \|y\|_X \}$).

Hat man also die aRNP für den komplexen Banachverband $(Z_1, \|\cdot\|_{Z_1})$ gezeigt, so auch für $(Z_0, \|\cdot\|_{Z_0})$, q.e.d. (Reduktion).

Sei nun also $Z = X \oplus iX$ separabler komplexer Banachverband, der $c_0 (= c_0(\mathbb{C}))$ nicht enthält (als Unterbanachraum). Dann ist X separabler reeller Banachverband, der $c_0(\mathbb{R})$ nicht enthält (als Unterbanachraum). Nach [48 cor.2], [32 rem. p.323] existiert

eine Semi-Einbettung $S: X \rightarrow L^1(\mu, \mathbb{R})$, μ geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß. Ich zeige, daß die Komplexifizierung

$S_{\mathbb{C}}: Z \rightarrow L^1(\mu, \mathbb{C})$, $S_{\mathbb{C}}(x + iy) := Sx + iSy$ ($x, y \in X$) eine Semi-Einbettung von Z mit der äquivalenten (s.o.) Norm $\|x + iy\|_{\infty} := \sup \{ \|x\|, \|y\| \}$ ist.

$S_{\mathbb{C}}$ injektiv (und $\mathbb{C}$ -linear, stetig) ist trivial. Seien

$z_n = x_n + iy_n \in Z$, $\|z_n\|_{\infty} \leq 1$ mit $S_{\mathbb{C}} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f = u + iv$ in $L^1(\mu, \mathbb{C})$,
 $u, v \in L^1(\mu, \mathbb{R})$. Da $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}: L^1(\mu, \mathbb{C}) \rightarrow L^1(\mu, \mathbb{R})$ stetig sind, folgt
 $Sx_n \rightarrow u$, $Sy_n \rightarrow v$ in $L^1(\mu, \mathbb{R})$.

$\|x_n\|, \|y_n\| \leq \|z_n\|_{\infty} \leq 1$, S Semi-Einbettung $\Rightarrow$

$\exists x, y \in B_X: Sx = u, Sy = v \Rightarrow$

$z := x + iy \in Z$, $\|z\|_{\infty} \leq 1$ und $S_{\mathbb{C}} z = f$.

Also ist $S_{\mathbb{C}}^B(Z, \|\cdot\|_{\infty}) \subset L^1(\mu, \mathbb{C})$ abgeschlossen, d.h. $S_{\mathbb{C}}$ Semi-Einbettung (bzgl. $\|\cdot\|_{\infty}$). Nach (3.1) und (3.4) hat Z die aRNP, q.e.d.

(3.6) Folgerungen:

Aus dem Satz folgt, daß außer L^1 auch viele andere Räume ohne RNP die aRNP haben (s. Liste am Ende des Paragraphen). Z.B.:

a) Für jeden kompakten Raum hat $C(K)' = M(K)$ die aRNP.

Denn $M(K)$ ist schwach folgenvollständiger [DS IV.13.22] Banachverband [S II.5.5].

b) Insbesondere hat $M = M(T)$ die aRNP. Im Lichte von (3.1)

$(X \text{ aRNP} \Rightarrow L^1(X) \text{ aRNP} \text{ und } M_a(X) = H^1(X) \text{ aRNP})$ könnte man vermuten, daß auch gilt: $X \text{ aRNP} \Rightarrow M(X) \text{ aRNP}$. Dies stimmt aber nicht einmal dann, wenn X sogar (zusätzlich) Banachverband ist: Talagrand [69 thm.1] hat einen schwach folgenvollständigen Banachverband X konstruiert (der also aRNP hat), so daß aber $M(X) \not\subset c_0$ enthält.

c) L^{∞}' hat aRNP, da bekanntlich $L^{\infty}' = C(K)$ (K = Spektrum von L^{∞}).

d) Sei X ein Banachraum mit G.-L. l.u.st. [Pe p.24], der $l^{\infty}(n)$ nicht gleichmäßig enthält. Dann hat X'' aRNP.

$(X \text{ enthält } l^{\infty}(n) \text{ gleichmäßig} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X: d(x_n, l^{\infty}(n)) \leq c$, wobei d den Banach-Mazur-Abstand von Banachräumen bezeichnet.

Wie in [50 p.687] bemerkt wird, folgt aus [57 cor.10], daß dies äquivalent ist zum fast-isometrischen Enthaltensein der $l^{\infty}(n)$

in X , d.h. zur Definition von gleichmäßig Enthaltensein in [Pe thm.4.2.iv].)

Beweis von d): X enthält $l^\infty(n)$ nicht gleichmäßig $\Rightarrow X''$ enthält $l^\infty(n)$ nicht gleichmäßig wegen des Prinzips der lokalen Reflexivität [45 thm.3.1] $\Rightarrow X'' \not\subset c_0$. Andererseits:

X hat G.-L. l.u.st. $\Rightarrow X''$ liegt komplementiert in einem Banachverband [Pe rem.II p.25]. Da $X'' \not\subset c_0$, liegt X'' auch (komplementiert) in einem Banachverband, der c_0 nicht enthält [40 thm.1 und rem.3], also hat X'' die arNP.

e) Aus d) folgt Theorem 4.2(iv) in [Pe].

(3.7) Operatortheoretische Charakterisierung

Zunächst sei an die operatortheoretische Charakterisierung der RNP erinnert [DU III.1.5]: Y hat RNP $\Leftrightarrow$ jeder Operator $S: L^1 \rightarrow Y$ ist Riesz-darstellbar, d.h. $\exists \varphi \in L^\infty(Y) \quad \forall \psi \in L^1: S\psi = \int \psi d\varphi$.

Diese Bedingung lautet m.a.W.: Die Abbildung

$L^\infty(Y) \rightarrow L(L^1, Y)$, $\varphi \mapsto \Phi$ mit $\Phi\psi := \int \psi d\varphi$ ist surjektiv.

Der allgemeine Fall wird durch folgenden Satz beschrieben, der im wesentlichen bekannt ist (s. Beweis). An ihm kann man dann die gewünschte Charakterisierung der arNP ablesen (3.8). Sei wieder $Y \subset X'$.

Satz: $L_Y^\infty(X', X) \rightarrow L(L^1, Y)$

$\varphi \mapsto \Phi$ mit $\Phi\psi := \int \psi d\varphi$, $\psi \in L^1$,

ist isometrischer Isomorphismus.

Dabei $L^\infty(Y) \simeq \{S \in L(L^1, Y) : S \text{ ist Riesz-darstellbar}\}$.

Beweis: Sei $\varphi \in L_Y^\infty(X', X) \xrightarrow{(0.5)5^\circ} \forall \psi \in L^1: \int \psi d\varphi \in Y$ und $\xrightarrow{(0.8)1^\circ}$

$\|\int \psi d\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_1$, also ist $\Phi \in L(L^1, Y)$ und $\|\Phi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Sei umgekehrt $S \in L(L^1, Y)$. Nach [T prop.7-1-2 und Beweis] gibt es ein $\varphi \in L^\infty(X', X)$, $\|\varphi\|_\infty \leq \|S\|$, das S darstellt, weshalb auch

$\varphi \in L_Y^\infty(X', X)$ ist.

$\varphi \rightarrow \Phi$ ist injektiv: Sei $\Phi = 0$, d.h. $\int \varphi \psi d\lambda = 0 \quad \forall \psi \in L^1 \Rightarrow$

$\forall x \in X: \int \langle x, \varphi \rangle \psi d\lambda = 0 \quad \forall \psi \in L^1$, d.h.

$\langle x, \varphi \rangle \in L^\infty$ ist das 0-Funktional auf $L^1 \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$\langle x, \varphi \rangle = 0$ f.ü. $\forall x \in X$, d.h. $\varphi = 0$ in $L^\infty(X', X)$ (nach Definition dieses Raums!).

Die 2. Behauptung ist trivial. Q.e.d.

(3.8)

Nun zum analytischen Fall. Sei $S: L^1 \rightarrow Y$; S heißt "analytisch" : $\Leftrightarrow$
 $S|_{H_O^1} = 0$. Es ist klar, daß man in diesem Fall S mit dem Operator $\tilde{S}$:
 $L^1/H_O^1 \rightarrow Y$ identifizieren kann, der

$$\begin{array}{ccc} L^1 & \xrightarrow{S} & Y \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{S} & \\ L^1/H_O^1 & & \end{array}$$

kommutativ macht.

(Allgemein gilt ja: $X_O \subset X$ Inklusion von Banachräumen, $q: X \rightarrow X/X_O$ die kanonische Quotientenabbildung $\Rightarrow$

$L(X/X_O, Y) \rightarrow \{S \in L(X, Y): S|_{X_O} = 0\}$, $S \rightarrow Sq$

ist isometrischer Isomorphismus.)

Setzt man $L_a(L^1, Y) := \{S \in L(L^1, Y): S \text{ ist analytisch}\}$, so hat man also einen isometrischen Isomorphismus

$L(L^1/H_O^1, Y) \rightarrow L_a(L^1, Y)$, $S \rightarrow Sq$.

Ich nenne auch kurz $S \in L(L^1/H_O^1, Y)$ Riesz-darstellbar, wenn es Sq ist.

Im folgenden identifiziere ich gemäß (2.5) $H^\infty(Y)$ mit $L_{Y,a}^\infty(X', X)$ und $\mathcal{H}^\infty(Y)$ mit $L_a^\infty(Y)$.

Satz: $H^\infty(Y) \rightarrow L(L^1/H_O^1, Y)$

$\varphi \rightarrow \Phi$ mit $\Phi[\psi] := \int \varphi \psi d\lambda$, $[\psi] \in L^1/H_O^1$,

ist isometrischer Isomorphismus.

Dabei $\mathcal{H}^\infty(Y) \xrightarrow{\sim} \{S \in L(L^1/H_O^1, Y): S \text{ ist Riesz-darstellbar}\}$.

Beweis: Zunächst ersetze man gemäß obigen Vorbereitungen

$L(L^1/H_O^1, Y)$ durch $L_a(L^1, Y)$. Sei $\varphi \in H^\infty(Y)$. Der φ gemäß Satz (3.7) zugeordnete Operator $\Phi: L^1 \rightarrow Y$ ist analytisch, da $\int \varphi \psi d\lambda = 0$ falls $\varphi \in H^\infty(Y)$, $\psi \in H_O^1$ (s. Beweis von Satz (4.2)2°).

Weiter ist wegen Satz (3.7) nur noch zu zeigen, daß die Abbildungen surjektiv sind: Sei $S \in L_a(L^1, Y) \xrightarrow{(3.7)}$

$\exists \varphi \in L_Y^\infty(X', X)$ mit $S\psi = \int \varphi \psi d\lambda \quad \forall \psi \in L^1$.

Sei speziell $\psi_n(\theta) := e^{in\theta}$, $n \geq 1 \Rightarrow \psi_n \in H_O^1 \Rightarrow S\psi_n = 0$, da S analytisch ist. Aber $S\psi_n = \int \varphi \psi_n d\lambda = \int \varphi(\theta) e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \hat{\varphi}(-n)$, also

$\hat{\varphi}(m) = 0 \quad \forall m < 0$, d.h. $\varphi \in L_{Y,a}^\infty(X', X) = H^\infty(Y)$, womit die 1. Abbildung surjektiv ist.

Sei nun $S \in L_a(L^1, Y)$ Riesz-darstellbar mit darstellender Funktion $\varphi \in L^\infty(Y)$. Nach eben ist auch $\varphi \in H^\infty(Y)$, also $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(Y)$, q.e.d.

Da nach (2.11) Y genau dann die aRNP hat, wenn $H^\infty(Y) = \mathcal{H}^\infty(Y)$, erhält man das

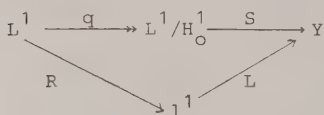
Corollar: Y hat aRNP $\Leftrightarrow$ jeder Operator $S: L^1/H_O^1 \rightarrow Y$ ist Riesz-darstellbar (durch $\varphi \in L^\infty(Y)$, das dann automatisch in $\mathcal{H}^\infty(Y)$ liegt).

Edgar bemerkt in [26 prop.3], daß die Umkehrung der (1.) Abbildung des Satzes so aussieht ($H^\infty(Y)$ wieder als Funktionen auf der Kreisscheibe aufgefaßt):

$S \mapsto (z \mapsto S[P_z])$, $P_z(t) := \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$ der Poissonkern.

(Sei nämlich $\varphi \in L_{Y,a}^\infty(X', X)$ darstellende Funktion $\Rightarrow$
 $P[\varphi](z) = \int P_z \varphi d\lambda = S[P_z].$)

(3.9) Corollar: Y hat aRNP $\Leftrightarrow \forall S: L^1/H_O^1 \rightarrow Y \exists R, L$ so daß



kommutiert. In diesem Fall kann man zu gegebenem $\epsilon > 0$

$\|R\| \leq \|S\| + \varepsilon$ und $\|L\| \leq 1$ erreichen.

Beweis: Nach [58 thm.A.3] (für einen vereinfachten Beweis s.

[DU III.1.8]) gilt für einen Operator $\tilde{S}: L^1 \rightarrow Y$:

$\tilde{S}$ ist Riesz-darstellbar $\Leftrightarrow \tilde{S} = LR$ faktorisiert über l^1 ;

in diesem Fall kann man $\|R\| \leq \|\tilde{S}\| + \varepsilon$, $\|L\| \leq 1$ erreichen.

Aus dem letzten Corollar folgt die Behauptung.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob man auch eine Faktorisierung über l^1 von $S: L^1/H_O^1 \rightarrow Y$ selbst erreichen kann (statt von Soq), falls Y die aRNP hat. (Eine positive Antwort würde zeigen, daß die aRNP eine 3-Raum-Eigenschaft ist, s.(3.11).)

Die Antwort ist aber negativ, wie aus einem unveröffentlichten Beispiel von Delbaen hervorgeht, dessen Mitteilung ich Dowling verdanke. Danach ([Pe p.55 added in proof 3°], [72 rem.6]) gibt es einen ∞ -dimensionalen separablen Dualraum Y (der also sogar die RNP hat), der komplementiert in L^1/H_O^1 liegt, "aber" nicht isomorph zu l^1 ist. Sei $P: L^1/H_O^1 \rightarrow Y$ Projektion; diese faktorisiert nicht über l^1 :

$$\text{Annahme, } \exists \quad \begin{array}{ccc} L^1/H_O^1 & \xrightarrow{P} & Y \\ & \searrow S \quad \nearrow R & \\ & l^1 & \end{array}, \quad P = RS.$$

Für $x \in l^1$ ist $SRSRx = SPRx = SRx$, also $SR: l^1 \rightarrow X \subset l^1$ Projektion auf einen Teilraum $X \subset l^1$. Weiter ist das Komplement $\ker(SR) = \ker R$: " $\supset$ " ist trivial; " $\subset$ ": Sei $x \in \ker SR \Rightarrow 0 = SRx = RSRx = PRx = Rx$. Also $l^1 = X \oplus \ker R \Rightarrow X \cong l^1/\ker R \cong Y$, d.h. Y ist isomorph zu einem komplementierten Teilraum von $l^1 \Rightarrow Y \cong l^1$ [LT I 2.a.3], Widerspruch.

(3.10)

Ich erinnere an folgende Aussagen über Operatoren $S: L^1 \rightarrow Y$,

die ich auf den L^1/H_O^1 -Fall übertragen will:

$$\begin{array}{ccc} \text{a)} & & \text{b)} \\ \text{schwach kompakt} & \xLeftrightarrow{\neq} & \text{Riesz-darstellbar} & \xLeftrightarrow{\neq} & \text{Dunford-Pettis} \end{array}$$

Dabei heißt ein Operator Dunford-Pettis (D.P.) oder vollstetig, wenn er schwach kompakte in norm-kompakte Mengen überführt.

Ein Wort zum Beweis:

a) " $\Rightarrow$ " ist der klassische Satz von Dunford-Pettis [DU III.2.12],

" $\Leftarrow$ " ist [DU III.2.22] (man nehme einfach eine Quotientenabbildung

$L^1 \rightarrow l^1$).

b) " $\Rightarrow$ " ist [DU III.2.11] in Verbindung mit der Charakterisierung schwach kompakter Mengen in L^1 [DU III.2.15],

" $\Leftarrow$ " ist in [DU p.75]: Sei $S: L^1 \rightarrow c_0$ gegeben durch

$Sf = (fg_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}, g_n \in L^\infty$. Dann gilt:

S ist darstellbar $\Leftrightarrow g_n \rightarrow 0$ f.ü., S ist Dunford-Pettis $\Leftrightarrow g_n \rightarrow 0$ nach Maß.

Man hat also nur $g_n \in L^\infty$ so zu wählen, daß $S: L^1 \rightarrow c_0$ wohldefiniert und beschränkt ist, $g_n \rightarrow 0$ nach Maß, $g_n \not\rightarrow 0$ f.ü. Dies wird z.B.

erfüllt von $g_n = \chi_{T_{mj}} \quad (n = 2^m + j, m \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j \leq 2^m - 1)$, wobei

$$T_{mj} := \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m} \right) 2\pi \subset T = [0, 2\pi).$$

Lemma: Sei $S: L^1/H_0^1 \rightarrow Y$, $q: L^1 \rightarrow L^1/H_0^1$ kanonisch.

1° S schwach kompakt $\Leftrightarrow$ Sq schwach kompakt

2° S Dunford-Pettis $\Leftrightarrow$ Sq Dunford-Pettis.

Beweis: 1° " $\Rightarrow$ " trivial

$$\begin{array}{l} \text{" $\Leftarrow$ " } \quad SB_{L^1/H_0^1} = Sq \underbrace{B_{L^1/H_0^1}^{-1}}_{\subset 2B_{L^1} + H_0^1} \subset Sq(2B_{L^1}) \quad \text{schwach kompakt.} \end{array}$$

2° " $\Rightarrow$ " trivial

" $\Leftarrow$ " Sei $W \subset L^1/H_0^1$ schwach kompakt. Nach [Pe thm.7.1] gibt es $V \subset L^1$ schwach kompakt mit $qV = W \Rightarrow SW = SqV$ ist norm-kompakt, q.e.d.

Da S einfach per definitionem Riesz-darstellbar heißt, wenn es Sq ist, sind damit die positiven Aussagen des folgenden Satzes schon bewiesen:

Satz: Sei $S: L^1/H_0^1 \rightarrow Y$ stetiger linearer Operator. Es gilt:

$$S \text{ schwach kompakt} \xLeftrightarrow{+} S \text{ Riesz-darstellbar} \xLeftrightarrow{+} S \text{ Dunford-Pettis}$$

Beweis: Nur " $\Leftarrow$ " sind noch zu zeigen.

Als darstellbaren, nicht schwach kompakten Operator nehme man einfach wieder eine Quotientenabbildung $L^1/H_0^1 \rightarrow l^1$. Eine solche gibt es, da z.B. nach [Pe cor.8.4] l^1 komplementiert in L^1/H_0^1

liegt.

Um einen D.-P.-Operator $S: L^1/H_O^1 \rightarrow C_O$ zu finden, der nicht darstellbar ist, identifiziert man wieder S mit Soq , was nach dem Lemma auch bzgl. des Begriffs "Dunford-Pettis" möglich ist. D.h. es geht darum, einen analytischen Operator $S: L^1 \rightarrow C_O$ zu finden, der D.P., aber nicht darstellbar ist. Sei wieder

$Sf = (\int f g_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ ($f \in L^1$) mit $g_n \in L^\infty$. Offenbar ist S analytisch $\Leftrightarrow g_n \in H^\infty \forall n$ (s. Beweis von Satz (3.8)).

Gesucht sind also $g_n \in H^\infty$ mit

1° $S: L^1 \rightarrow C_O$ wohldefiniert und beschränkt

2° $g_n(e^{it}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ nach Maß $d\lambda(t)$

3° $g_n(e^{it}) \not\rightarrow 0$ f.ü.

Sei wieder $n = 2^m + j$ ($m \in \mathbb{N}_O$, $0 \leq j \leq 2^m - 1$) und $\varphi_n := \chi_{T_{mj}} + \frac{1}{m} \chi_{T \setminus T_{mj}}$

$\Rightarrow \varphi_n \in L^\infty$, $\varphi_n > 0$, $\ln \varphi_n \in L^1$, man kann also die äußere Funktion $g_n \in H^\infty$ mit $|g_n(e^{it})| = \varphi_n(t)$ f.ü. bilden [R 17.16].

2° und 3° sind klar. Zu 1°:

Für jedes $f \in L^1$ gilt $\lim_{\lambda(E) \rightarrow 0} \int_E |f| d\lambda = 0 \Rightarrow$

$$|\int f g_n d\lambda| \leq \int |f| |g_n| d\lambda = \int |f| d\lambda + \frac{1}{m} \int_{T \setminus T_{mj}} |f| d\lambda \leq o(1) + \frac{1}{m} \|f\|_1 = o(1)$$

($n = 2^m + j \rightarrow \infty$), d.h. $Sf \in C_O$.

$\|Sf\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g_n\|_\infty \leq \|f\|_1$, d.h. $\|S\| \leq 1$, q.e.d.

Bourgain zeigt in [7 p689], daß jeder Operator $S: L^1/H_O^1 \rightarrow L^1$ D.P. ist. (Daraus folgt, daß L^1 nicht komplementiert in L^1/H_O^1

liegt.) Dies folgt auch aus dem letzten Satz: Da L^1 die arNP hat, ist S darstellbar, also D.P. (Beide Beweise verwenden die Liftungs-Eigenschaft für schwach kompakte Mengen in L^1/H_O^1 .)

Analoge Fragen für Operatoren $H^1 \rightarrow X$ werden in §4 untersucht.

(3.11)

Offen ist die Frage, ob die aRNP eine 3-Raum-Eigenschaft ist, d.h. ob X sie hat, wenn sie $X_0 \subset X$ und X/X_0 haben. Ich kann nur zeigen:

Satz: Sei $X_0 \subset X$ Unterbanachraum.

X_0 RNP, X/X_0 aRNP $\Rightarrow X$ aRNP.

Beweis: Der Beweis geht analog zu dem des Satzes von Edgar

[DU p.211], wonach die aRNP eine 3-Raum-Eigenschaft ist.

Sei $q: X \rightarrow X/X_0$ die Quotientenabbildung. Nach einem Satz von Bartle und Graves [BP cor.7.1] hat q einen stetigen Schnitt $s: X/X_0 \rightarrow X$

mit $s(0) = 0$. Sei $\delta > 0$ mit $s(\delta B_{X/X_0}) \subset B_X$.

Sei nun $f \in H^\infty(X)$ gegeben, o.B.d.A. $\|f\|_\infty \leq \delta \Rightarrow$

$q \circ f \in H^\infty(X/X_0)$, $\|q \circ f\|_\infty \leq \delta \Rightarrow$

$q \circ f = P[\varphi]$ für ein $\varphi \in L^\infty(X/X_0)$, $\|\varphi\|_\infty = \|q \circ f\|_\infty \leq \delta$.

Dann ist $s \circ \varphi \in L^\infty(X)$, also $g := P[s \circ \varphi] \in H^\infty(X)$. Weiter gilt

$q \circ g = P[\underbrace{q \circ s \circ \varphi}_{=id}] = P[\varphi] = q \circ f$, d.h. $f - g: D \rightarrow X_0$

$\Rightarrow f - g \in H^\infty(X_0) = \mathcal{H}^\infty(X_0)$ (Satz (1.12))

$\Rightarrow \exists \psi \in L^\infty(X_0): f - g = P[\psi]$

$\Rightarrow f = g + f - g = P[s \circ \varphi + \psi]$, $s \circ \varphi + \psi \in L^\infty(X)$, also $f \in \mathcal{H}^\infty(X)$, q.e.d.

Anmerkung: 1° Offenbar könnte man die volle 3-Raum-Eigenschaft

zeigen, wenn $q: X \rightarrow X/X_0$ einen holomorphen Schnitt hätte. Dies

ist jedoch i.a. nicht der Fall, denn daraus würde folgen, daß

jedes $f \in H^\infty(X/X_0)$ ein Lifting $F \in H^\infty(X)$ besitzt, was [41 Satz 1.1] widerspricht.

2° Dowling gibt in [25 cor. p.6] einen alternativen Beweis von

Edgar für den Satz an, der sich auf die l^1 -Faktorisierung (3.9)

stützt. An ihm kann man ablesen, daß man die volle 3-Raum-Eigen-

schaft auch zeigen könnte, wenn man die in (3.9) nach dem Beweis

diskutierte stärkere Faktorisierungsaussage hätte, was aber nicht

der Fall ist.

3° Im Bereich der Banachverbände ist die aRNP eine 3-Raum-Eigenschaft. Genauer: Sei X Banachverband, $X_0 \subset X$ Unterbanachraum, X_0 und X/X_0 haben aRNP $\Rightarrow X$ hat aRNP. Dies folgt wegen Satz (3.5) daraus, daß das Nichtenthaltensein von c_0 eine 3-Raum-Eigenschaft ist. Dies wird in [44 rem.2 p.231] als "well-known" bezeichnet, ich habe aber keine Referenz gefunden, weshalb ich es beweise. Es geht also um folgendes

Lemma: Sei $X_0 \subset X$ Inklusion von Banachräumen.

$$c_0 \hookrightarrow X_0, c_0 \not\hookrightarrow X/X_0 \Rightarrow c_0 \not\hookrightarrow X.$$

Beweis: Ich zitiere folgende Sätze aus [LT I]:

a) [LT I 2.a.2] $Y \hookrightarrow c_0, \dim Y = \infty \Rightarrow c_0 \hookrightarrow Y$

b) [LT I 2.f.6] Z Quotient von $c_0 \Rightarrow Z \hookrightarrow c_0$,

also nach a) auch $c_0 \hookrightarrow Z$, falls $\dim Z = \infty$.

c) [LT I 2.c.1], [56 thm.2] Sei $\dim X = \dim Y = \infty$. X und Y sind "total unvergleichbar" (d.h. $\nexists Z$ mit $\dim Z = \infty$ so daß $Z \hookrightarrow X, Z \hookrightarrow Y$)

$\Leftrightarrow X + Y$ ist abgeschlossen in jedem Raum U mit $X \hookrightarrow U, Y \hookrightarrow U$.

(Ich brauche nur " $\Rightarrow$ ", d.i. [56 thm.1].)

Nach a) sind insbesondere c_0 und $Y \not\hookrightarrow c_0$ total unvergleichbar.

Sei nun $X_0 \subset X$ Inklusion von Banachräumen, $q: X \rightarrow X/X_0 =: Q$ die Quotientenabbildung und gelte $c_0 \hookrightarrow X$, dann ist zu zeigen:

$c_0 \hookrightarrow X_0$ oder $c_0 \hookrightarrow Q$. Gilt $c_0 \hookrightarrow X_0$, so ist man fertig. Gelte also

$c_0 \not\hookrightarrow X_0$. Dann folgt $c_0 + X_0 \subset X$ abgeschlossen, denn für $\dim X_0 < \infty$

ist das klar, und für $\dim X_0 = \infty$ folgt es aus c) wegen $c_0 \not\hookrightarrow X_0$.

$\Rightarrow q(c_0) \subset Q$ abgeschlossen, denn $q^{-1}q(c_0) = c_0 + X_0 \subset X$ abgeschlossen.

Also ist $q(c_0) \subset Q$ Unterbanachraum und Quotient von c_0 . Nun:

1. Fall: $\dim c_0 \cap X_0 = \infty \Rightarrow c_0 \cap X_0 \subset c_0$ ∞ -dimensionaler Unterbanachraum $\xrightarrow{a)} c_0 \hookrightarrow c_0 \cap X_0 \subset X_0$ im Widerspruch zur Annahme $c_0 \not\hookrightarrow X_0$.

2. Fall: $\dim c_0 \cap X_0 < \infty \Rightarrow \dim q(c_0) = \infty$, denn $c_0 \cap X_0 = \ker q|_{c_0}$,

also hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} q|_{c_0} & \xrightarrow{\quad} & q(c_0) \\ \downarrow & \nearrow \sim & \\ c_0/c_0 \cap X_0 & & \end{array}$$

und $c_0/c_0 \cap X_0$ ist ∞ -dimensional.

Aus b) folgt jetzt $c_0 \hookrightarrow q(c_0) \subset Q$, q.e.d.

(3.12) Diskussion: Hat B oder JT' aRNP?

Es fällt auf, daß kein Banachraum ohne aRNP bekannt ist, der weder c_0 noch L^1/H_0^1 enthält. Diese Kenntnis wäre wichtig, weil man ohne sie gewisse Fragen nicht negativ beantworten kann. Z.B.:

i) Folgt die aRNP aus der wRNP (schwache Radon-Nikodým-Eigenschaft [T §7])? Ein Raum, der c_0 oder L^1/H_0^1 (und damit L^1 [7 1.thm.]) enthält, hat die wRNP nicht [T p.76], kann also kein Gegenbeispiel sein.

ii) In §4 wird, angeregt durch (3.8), die Darstellbarkeit von Operatoren $H^1 \rightarrow X$ durch $L^\infty(X)$ -Funktionen untersucht. Hat X die aRNP, wenn jeder Operator $H^1 \rightarrow X$ darstellbar ist? In (4.3) wird gezeigt, daß nicht jeder Operator $H^1 \rightarrow X$ darstellbar ist, falls X c_0 oder L^1/H_0^1 enthält.

Natürliche Kandidaten (für die Ausgangsfrage) sind das Dual JT' oder Präduale B des James tree space JT [46], da diese Räume weder c_0 noch l^1 enthalten (also auch L^1/H_0^1 nicht) und die RNP nicht haben. Man könnte versuchen, die aRNP mittels der Methode der Semi-Einbettungen (3.4) zu beweisen oder zu widerlegen.

Genauer:

a) Nach Corollar (3.4) hätte B (B ist separabel) die aRNP, falls es eine Semi- H_∞ -Einbettung $B \rightarrow X$ gäbe, wobei X die aRNP hat. X darf dann aber nicht die RNP haben, da sonst B sie hätte, wieder nach Corollar (3.4). Es bietet sich also $X := L^1$ an.

Tatsächlich kann ich eine Semi-Einbettung $JT' \rightarrow L^1$ konstruieren, was aber keinen Effekt hat, da JT' nicht separabel ist. Die Restriktion dieser Semi-Einbettung auf das separable $B \subset JT' = B''$ ist keine Semi-Einbettung mehr. Daß das kein Zufall ist, zeigt das folgende Lemma, dessen Beweis (für H_δ -Einbettungen) ich Costé verdanke.

Lemma 1: Es existiert keine Semi- H_δ -Einbettung $S: B \rightarrow L^1$.

Beweis: Da $c_0 \not\hookrightarrow B' = JT$ und B die RNP nicht hat, genügt es, etwas allgemeiner zu zeigen:

X separabel, $S: X \rightarrow L^1$ Semi- H_δ -Einbettung, $c_0 \not\hookrightarrow X' \Rightarrow X$ hat RNP.

Man zeigt, daß jeder Operator $R: L^1 \rightarrow X$ darstellbar ist, was nach [DU III.1.5] äquivalent zur RNP ist.

Betrachte $S': L^\infty \rightarrow X'$. Wegen $c_0 \not\hookrightarrow X'$ ist S' schwach kompakt nach [DU VI.2.15], weil L^∞ ein $C(K)$ -Raum ist. Nach dem Satz von Gantmacher [DS VI.4.8] ist S schwach kompakt, also auch $SR: L^1 \rightarrow X \rightarrow L^1$. Daher ist SR Riesz-darstellbar [DU III.2.12] und damit auch R (Satz (3.4)2°), q.e.d.

Der Satz von Bourgain-Rosenthal " X separabel, $S: X \rightarrow Y$ Semi-Einbettung, Y RNP $\Rightarrow X$ RNP" gilt gemäß [23 p.160 Fußn.] auch allgemeiner für schwach kompakt erzeugtes oder sogar nur schwach K -analytisches [68] X . Dies gilt vermutlich auch bzgl. der $aRNP$, aber es ist nutzlos, sich das zu überlegen, weil JT' nicht schwach K -analytisch ist [68 p.413]. (Dies folgt auch aus der eben zitierten Fußnote und daraus, daß die erwähnte Semi-Einbettung $JT' \rightarrow L^1$ auch eine Semi-Einbettung $JT' \rightarrow L^p$ ist, $1 \leq p < 2$.)

b) Nach Corollar (3.4) hätte B bzw. JT' die $aRNP$ nicht, falls es eine Semi- H_δ -Einbettung $X \rightarrow B$ bzw. JT' gäbe, wobei X separabel ohne $aRNP$ ist.

Tatsächlich kann ich eine Semi-Einbettung $L^\infty/H_0^\infty \rightarrow B$ konstruieren;

L^∞/H_0^∞ ist ohne aRNP, aber inseparabel. Die Restriktion auf den separablen Teilraum $C/A_0 \subset L^\infty/H_0^\infty = (C/A_0)''$ [Pe thm 1.2], der auch ohne aRNP ist, da er c_0 enthält, ist keine Semi-Einbettung mehr. Daß das kein Zufall ist, zeigt das folgende

Lemma 2: Sei X separabel und enthalte c_0 oder $L^1/H_0^1 \Rightarrow$

‡ Semi-Einbettung $S: X \rightarrow JT'$ (also auch keine nach $B \subset JT'$).

Beweis: Angenommen, S existiert doch, dann ist S auch G_δ -Einbettung wegen X separabel (Lemma (3.4)).

1. Fall: $c_0 \hookrightarrow X \Rightarrow S|_{c_0} \rightarrow JT'$ G_δ -Einbettung $\Rightarrow S|_{c_0} \rightarrow JT'$ Einbettung [11 prop.2.2], Widerspruch [46 cor.1].

2. Fall: $L^1/H_0^1 \hookrightarrow X \Rightarrow L^1 \hookrightarrow X$, da $L^1 \hookrightarrow L^1/H_0^1$ [7 1.thm.] $\Rightarrow S|_{L^1} \rightarrow JT'$ G_δ -Einbettung $\Rightarrow L^1 \hookrightarrow JT'$ [11 thm.2.11] $\Rightarrow L^1 \hookrightarrow JT'$, Widerspruch [46 cor.1], q.e.d.

Ich erinnere daran, daß man an der Widerlegung der aRNP für B oder JT' v.a. deswegen interessiert war, weil kein Raum ohne aRNP bekannt ist, der weder c_0 noch L^1/H_0^1 enthält. Das Lemma zeigt, daß man aber genau aus diesem Grund derzeit die aRNP für JT' nicht widerlegen kann, indem man einen separablen Raum ohne aRNP nach JT' semi-einbettet.

(3.13) Zusammenstellung

Zum Abschluß dieses Paragraphen stelle ich Räume mit bzw. ohne aRNP in 2 Listen zusammen. Bei ihrer Betrachtung könnte man vermuten, daß " X aRNP $\Rightarrow X''$ aRNP" gilt, wegen [Pe rem.III p.25] vielleicht zumindest für Banachverbände. Dies ist aber falsch, wie das Beispiel $X := (\bigoplus_{n=1}^\infty l^\infty(n))_1$ zeigt: X hat sogar RNP ([DU p.219], oder da X separabler Dualraum ist). Andererseits $l^1 \xhookrightarrow{\oplus} X' [LT p.101, 3.] \Rightarrow l^\infty \hookrightarrow X'' \Rightarrow X'' \not\hookrightarrow \text{aRNP}$.

Bzgl. der verwendeten Dualitätsaussagen vgl. [Pe §1], [Ko p.192].

a) Räume mit aRNP: Sei μ ein (positives) Maß.

RNP-Räume [DU p.218f.]	: Corollar (2.10) 1°
$L^1(\mu)$	: (3.1) Corollar 1°
$C(K)' = M(K)$ (K kompakt)	: (3.6) a)
L^∞, l^∞	: L^∞, l^∞ sind $C(K)$ -Räume
$C^k[0,1]'$ ($0 \leq k < \infty$)	: $C^k[0,1] \cong \mathbb{C}^k \oplus C[0,1]$ $f \mapsto (f(0), \dots, f^{(k-1)}(0), f^{(k)})$
$C^{0,1}[0,1]'$ ($C^{0,1} := \text{Lipschitz}$)	: $C^{0,1}[0,1] \cong \mathbb{C} \oplus L^\infty[0,1]$ $f \mapsto (f(0), f')$
$C^{0,\alpha}(K)'$ (K Polyeder, $0 \leq \alpha < 1$, $C^{0,\alpha} := \text{Hölder}$)	: $C^{0,\alpha}(K) \cong l^\infty$ [6 rem. p.317]
$(L^\infty/H_O^\infty)' = H^1$	: $H^1 \hookrightarrow L^1 \Rightarrow H^1 \hookrightarrow L^1 = L^\infty$
$L^p(\mu, X), H^p(X)$	
(X aRNP, $1 \leq p < \infty$)	: (3.1) Satz und Corollar 2.

b) Räume ohne aRNP

$c_0, C, l^\infty, L^\infty$	: (2.11), $c_0 \hookrightarrow C \subset L^\infty, c_0 \subset l^\infty$
$K(H), L(H)$	: $c_0 \hookrightarrow K(H) \subset L(H)$ (2.11)
$L^1/H_O^1, H^\infty$	: (3.3), $L^1/H_O^1 \hookrightarrow H^\infty = (L^1/H_O^1)''$
$A, H^\infty = (L^1/H_O^1)'$	: $c_0 \hookrightarrow A \subset H^\infty$ [Pe cor.8.5]
A'	: $L^1/H_O^1 \hookrightarrow A' = L^1/H_O^1 \oplus V_{\text{sing}}$ [Pe p.11]
$C/A_O, L^\infty/H_O^\infty = H^1$	: $c_0 \hookrightarrow C/A_O \hookrightarrow L^\infty/H_O^\infty = H^1 = (C/A_O)''$ $\uparrow$ Nach [DU VI.2.15] enthält jeder nicht-reflexive Quotient eines $C(K)$ -Raums c_0 .

§4: Operatoren $H^1 \rightarrow X$

Angeregt durch das Studium von Operatoren $L^1/H_0^1 \rightarrow X$ in (3.8) - (3.10) untersuche ich in diesem Paragraphen analoge Fragen für Operatoren $H^1 \rightarrow X$ (bzw. meist $\bar{H}^1 \rightarrow X$, wobei $\bar{H}^1 := \{\bar{f}: f \in H^1\} = \{f(\bar{z}): f(z) \in H^1\}$; man beachte, daß die Fourierkoeffizienten von L^1/H_0^1 - "Funktionen" und von $\bar{H}^1$ -Funktionen auf der gleichen Teilmenge von $\mathbb{Z}$, nämlich $-\mathbb{N}_0$, leben).

Es zeigt sich, daß im Unterschied zur L^1/H_0^1 -Situation Riesz-Darstellbarkeit eines Operators $\bar{H}^1 \rightarrow X$ durch eine $L^\infty(X)$ - bzw. $H^\infty(X)$ -Funktion nicht auf das Gleiche hinausläuft (4.6). Es scheint auch keine tieferen Zusammenhänge zwischen Riesz-Darstellbarkeit (im einen oder andern Sinn) aller Operatoren $\bar{H}^1 \rightarrow X$ und der aRNP für X zu geben (4.2): " $\Leftarrow$ " ist falsch, bzgl. " $\Rightarrow$ " folgt aus der Darstellbarkeit durch $H^\infty(X)$ -Funktionen sogar die RNP, während ich nicht entscheiden kann, ob aus der Darstellbarkeit durch $L^\infty(X)$ -Funktionen die aRNP folgt. Ich kann nur folgern, daß jede $H^\infty(X)$ -Funktion Cauchy-Integral einer $L^\infty(X)$ -Funktion ist (4.4), da aber die "pathologische Situation" $\varphi \in L^\infty(X)$, $C[\varphi] \in H^\infty(X) \setminus H^\infty(X)$ durchaus eintreten kann (4.5), kann ich daraus nicht auf die aRNP schließen.

Vollständig sind dagegen die Resultate bzgl. der Beziehungen zwischen den Bedingungen "schwach kompakt", "darstellbar durch $H^\infty(X)$ - bzw. $L^\infty(X)$ -Funktion", "Dunford-Pettis" an einen Operator $\bar{H}^1 \rightarrow X$: bis auf die trivial gültigen sind alle Implikationen falsch (4.6), im Gegensatz zur L^1 - und L^1/H_0^1 - Situation (3.10). Eng verknüpft mit der $L^\infty(X)$ -Darstellbarkeit von

$R: H^1 \rightarrow X$ ist die Fortsetzbarkeit von R auf L^1 . Gemäß der Hardy'schen Ungleichung [Du cor. 3.15] ist der "Hardy-Operator"

$H: H^1 \rightarrow l^1$, $f \mapsto (\frac{\hat{f}(n)}{n})$ wohldefiniert und beschränkt; H ist nicht fortsetzbar auf l^1 . Gleiches gilt allgemeiner für $H: H^1 \rightarrow l^p$,

$f \mapsto (\frac{\hat{f}(n)}{n^{1/p}})$, $1 \leq p < \infty$ (4.7). Der Beweis ist mit elementaren

Tensorprodukt-Techniken überraschend einfach. Es zeigt sich, daß genau dann alle $R: H^1 \rightarrow X'$ auf L^1 fortsetzbar sind, wenn

$H^1 \hat{\otimes} X \cong H^1(X)$ (unter der kanonischen Abbildung). Dies ist nach den obigen Resultaten "selten" der Fall (dagegen gilt $L^1 \hat{\otimes} X = L^1(X)$ immer [DU VIII.1.10]), es stimmt z.B. für $X = L^1(\mu)$, μ beliebiges Maß.

Die hier behandelten Fragen scheinen bisher nur sporadisch untersucht worden zu sein ([43 p.300f.], [9 p.321]). Im folgenden wird meist $H^p(Y)$ mit $L_a^p(Y) \subset L^p(Y)$ identifiziert (2.5).

(4.1) Definition: Sei X Banachraum, $1 \leq p \leq \infty$.

1° a) $\bar{H}^p(X) := \{f(\bar{z}) : f(z) \in H^p(X) \\ = \{f \in h^p(X) : f \text{ ist antiholomorph}\}.$

Bei $Y \subset X'$, $1 < p \leq \infty$ kann man vermöge der Identifikation (1.5) auch schreiben

$$\bar{H}^p(Y) = \{\varphi \in L_Y^p(X', X) : \hat{\varphi}(n) = 0 \forall n > 0\}.$$

b) $\bar{H}^p(X) := \bar{H}^p(X) \cap h^p(X) \\ = \{\varphi \in L^p(X) : \hat{\varphi}(n) = 0 \forall n > 0\}$

2° Sei $R: \bar{H}^1 \rightarrow X$ Operator. R heißt (Riesz-) darstellbar durch $L^\infty(X)$ - bzw. $H^\infty(X)$ - Funktion: $\Leftrightarrow \exists g \in L^\infty(X)$ bzw. $H^\infty(X)$ mit $Rf = \int f g d\lambda \quad \forall f \in \bar{H}^1$.

Analog ist für $R: \bar{H}^1 \rightarrow X$ Darstellbarkeit durch $L^\infty(X)$ - bzw. $\bar{H}^\infty(X)$ - Funktion definiert.

Es ist klar, daß in jedem Fall aus der $L^\infty(X)$ -Darstellbarkeit die Fortsetzbarkeit auf L^1 folgt, und umgekehrt, falls X die RNP hat (vgl. (3.7)).

(4.2) Satz: 1° Aus X RNP folgt i.a. nicht, daß alle $R: \bar{H}^1 \rightarrow X$ durch $L^\infty(X)$ -Funktion darstellbar sind.

2° Sind alle $R: \bar{H}^1 \rightarrow X$ durch $H^\infty(X)$ -Funktion darstellbar, so hat X RNP.

Beweis: 1° Es wird sich später zeigen (4.7), daß man sogar $X := l^2$ nehmen kann. Im Moment begnüge ich mich mit dem einfachsten Beispiel:

$X := H^1$, $R := \text{id}: H^1 \rightarrow H^1$. H^1 hat RNP, da es separabler Dualraum (von C/A_0) ist [Pe thm. 1.2]. Angenommen, id darstellbar durch $L^\infty(H^1)$ -Funktion $\Leftrightarrow \text{id}$ fortsetzbar zu $P: L^1 \rightarrow H^1 \Leftrightarrow \exists$ Projektion $P: L^1 \rightarrow H^1$, was nicht der Fall ist (Satz von Newman [Ho p.154]).

2^0 Zunächst sei bemerkt, daß für $f \in H^1$, $g \in H^\infty(X)$ gilt: $\int f g d\lambda = \hat{f}(0) \hat{g}(0) (= f(0) g(0))$. Dies ist für festes g nämlich klar, falls f ein analytisches Polynom $\sum_{n=0}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}$ ist; da diese dicht in H^1 liegen (vgl. Lemma (3.2)) und beide Seiten der behaupteten Gleichung stetig in $f \in H^1$ sind, folgt daraus der allgemeine Fall. Insbesondere ist für $f \in H_0^1$, $g \in H^\infty(X)$: $\int f g d\lambda = 0$.

Analog gilt für $f \in \bar{H}^1$, $g \in \bar{H}^\infty(X)$: $\int f g d\lambda = \hat{f}(0) \hat{g}(0)$, insbesondere für $f \in \bar{H}^1$, $g \in \bar{H}_0^\infty(X)$: $\int f g d\lambda = 0$

$$(\bar{H}_0^\infty(X) = \{f \in \bar{H}^\infty(X) : f(0) = 0\} = \{f \in L^\infty(X) : \hat{f}(n) = 0 \forall n \geq 0\}).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\forall R: \bar{H}^1 \rightarrow X \exists g \in H^\infty(X) \forall f \in \bar{H}^1: Rf = \int f g d\lambda,$$

$$\text{also auch } \forall R: H^1 \rightarrow X \exists g \in \bar{H}^\infty(X) \forall f \in H^1: Rf = \int f g d\lambda,$$

$$\text{also auch } \forall R: H_0^1 \rightarrow X \exists g \in \bar{H}_0^\infty(X) \forall f \in H_0^1: Rf = \int f g d\lambda.$$

Sei nun $S: L^1 \rightarrow X$ gegebener Operator; ich zeige, daß S Riesz-darstellbar ist:

$$S|_{\bar{H}^1} \rightarrow X \text{ wird dargestellt durch ein } g_+ \in H^\infty(X),$$

$$S|_{H_0^1} \rightarrow X \text{ wird dargestellt durch ein } g_- \in \bar{H}_0^\infty(X).$$

Sei $g := g_+ + g_- \in L^\infty(X)$ und $f \in L^1$ ein trigonometrisches Polynom, $f = f_+ + f_-$, $f_+ \in H_0^1$, $f_- \in \bar{H}^1$

$$\Rightarrow Sf = Sf_+ + Sf_- = \int f_+ g_- d\lambda + \int f_- g_+ d\lambda =$$

$$= \int f_+ g_- d\lambda + \underbrace{\int f_+ g_+ d\lambda}_{= 0} + \underbrace{\int f_- g_+ d\lambda}_{= 0} + \int f_- g_- d\lambda$$

$$= \int f g d\lambda$$

$\Rightarrow Sf = \int f g d\lambda \forall f \in L^1$, da die trigonometrischen Polynome dicht in L^1 liegen, q.e.d.

(4.3) Der letzte Satz läßt folgende Frage offen:

alle $R: H^1 \rightarrow X$ darstellbar durch $L^\infty(X)$ -Funktion $\stackrel{?}{\Rightarrow} X$ aRNP.

Ich zeige zunächst, daß man dies nicht widerlegen kann, solange alle bekannten Banachräume ohne aRNP c_0 oder L^1/H_0^1 enthalten (vgl. (3.12)):

Lemma: Sei X Banachraum, der c_0 oder L^1/H_0^1 enthält $\Rightarrow$ nicht alle $R: H^1 \rightarrow X$ sind durch $L^\infty(X)$ -Funktion darstellbar.

Beweis: Es ist klar, daß jeder (durch $L^\infty(X)$ -Funktion) darstellbare Operator $R: H^1 \rightarrow X$ oder $\bar{H}^1 \rightarrow X$ Dunford-Pettis-Operator ist, weil die analoge Aussage für $R: L^1 \rightarrow X$ gilt, vgl. (3.10). (Daraus folgt nochmals die Nichtdarstellbarkeit von $\text{id}: H^1 \rightarrow H^1$ ((4.2) 1^0):

$(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist schwache, aber nicht starke Nullfolge in H^1 , s.u.)

1.Fall: $c_0 \subset X$. Setze $R: H^1 \rightarrow c_0 \subset X$, $Rf := (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$ (Riemann-Lebesgue-Lemma).

Seien e_n die Einheitsvektoren in c_0 .

$Re^{in\theta} = e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0}$ schwache Nullfolge in H^1 (wieder nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma), $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist keine starke Nullfolge in c_0 , also auch nicht in X .

Daher ist R nicht D.P. und nicht darstellbar.

2.Fall: $L^1/H_0^1 \subset X$. Es bezeichne $[\cdot]$ die Restklassenabbildung $L^1 \rightarrow L^1/H_0^1$. Setze $R: \bar{H}^1 \hookrightarrow L^1 \twoheadrightarrow L^1/H_0^1 \subset X$.

$Re^{-in\theta} = [e^{-in\theta}] \in L^1/H_0^1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, $(e^{-in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0}$ schwache Nullfolge in $\bar{H}^1$ (s.o.), $([e^{-in\theta}])_{n \in \mathbb{N}_0}$ keine starke Nullfolge in L^1/H_0^1 (es ist ja $\| [e^{-in\theta}] \|_{L^1/H_0^1} = \sup_{h \in B_{H^\infty}} | \int h e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} | = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$), also auch nicht in X .

Wieder ist R nicht D.P., folglich nicht darstellbar. (Ein alternativer Beweis für beide Fälle geht mit dem Kompaktheitsargument in [DU II.3.8.c]: Wäre R darstellbar, so müßte demnach nämlich $R|H^\infty$ bzw. $R|\bar{H}^\infty$ kompakt sein. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man mit den gleichen Folgen wie eben).

Corollar: Sei X Banachverband. Sind alle Operatoren $H^1 \rightarrow X$ durch $L^\infty(X)$ -Funktionen darstellbar, so hat X die aRNP.

Beweis: Klar wegen Satz (3.5).

(4.4) Es geht weiter um die Frage:

alle $R: \bar{H}^1 \rightarrow Y$ darstellbar durch $L^\infty(Y)$ -Funktionen $\Rightarrow Y$ aRNP, d.h. $\forall f \in H^\infty(Y) \exists \varphi \in L^\infty(Y) : f = P[\varphi]$, oder, was nach (2.2) das Gleiche ist, $\forall f \in H^\infty(Y) \exists \varphi \in L_a^\infty(Y) : f = C[\varphi]$.

Eine gewisse Approximation dazu ist der folgende

Satz: Jedes $R: \bar{H}^1 \rightarrow Y$ darstellbar durch $L^\infty(Y)$ -Funktion $\Rightarrow \forall f \in H^\infty(Y) \exists \varphi \in L^\infty(Y) : f = C[\varphi]$.

Beweis: Sei $Y \subset X'$ und $f \in H^\infty(Y)$. Nach Satz (2.5) ist $f = C[\psi]$ für ein $\psi \in L_{Y,a}^\infty(X', X)$.

Setze $R: \bar{H}^1 \rightarrow Y$, $Rh := (G) \int_T h \psi d\lambda$.

Nach Satz (3.7) ist dies ein (wohldefinierter) stetiger linearer Operator, der nach Voraussetzung durch eine $L^\infty(Y)$ -Funktion φ dargestellt wird, d.h. $Rh = \int h \varphi d\lambda \quad \forall h \in \bar{H}^1$.

Sei $re^{i\theta} \in D$ fest, dann ist $e^{it} \xrightarrow{h} C_r(\theta-t) = \frac{1}{1-re^{i\theta}} e^{-it}$

in $\bar{H}^1$ (Randwert von $\zeta \xrightarrow{h} \frac{1}{1-re^{i\theta}\zeta}$). $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(re^{i\theta}) &= \int_0^{2\pi} C_r(\theta-t) \psi(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \psi(e^{it}) d\lambda(t) \\ &= Rh = \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \varphi(e^{it}) d\lambda(t) = C[\varphi](re^{i\theta}), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

(4.5) Es ist interessant, diese Situation noch näher zu diskutieren. Für jedes $f \in H^\infty(Y)$ findet man nach Satz (2.5) ein analytisches, aber nicht notwendig stark meßbares $\psi \in L_{Y,a}^\infty(X', X)$ mit $f = C[\psi]$. Nach dem Satz findet man unter der dortigen Voraussetzung auch ein stark meßbares, aber nicht notwendig analytisches $\varphi \in L^\infty(Y)$ mit $f = C[\varphi]$. Die Crux ist, daß man aus diesen beiden Darstellungen i.a. nicht folgern kann, daß es auch ein analytisches und stark meßbares $\phi \in L_a^\infty(Y)$ gibt mit $f = C[\phi]$ ($= P[\phi]$, damit würde in der Situation des Satzes die aRNP folgen). Denn:

Satz: $\exists$ Banachraum Y $\exists \varphi \in C(T, Y) \subset L^\infty(Y)$ so daß $f := C[\varphi] \in H^\infty(Y)$
 $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiert für kein θ schwach.
 (Also gibt es kein $\phi \in L_a^\infty(Y)$ mit $f = C[\phi] = P[\phi]$.)

Im nächsten Paragraphen wird sich herausstellen, daß es durchaus "normal" ist, wenn das Cauchy-Integral einer $L^\infty(Y)$ -Funktion φ keine radialen Limiten besitzt, doch ist in den dortigen Beispielen $C[\varphi]$ nicht einmal mehr in $N(Y)$. Die Pathologie dieses Satzes besteht darin, daß man durch die "analytische Projektion" $\varphi \mapsto C[\varphi]$ hier zwar nicht die Beschränktheit, aber trotzdem die starke Meßbarkeit der Randfunktion verliert.

Zum Beweis des Satzes brauche ich zunächst ein $f \in H^\infty \setminus C$ mit $\text{Ref} \in C$. Ein solches wird in [G p.377] ohne Beweis angegeben.

Da der Beweis laut einer privaten Mitteilung von Garnett schwierig ist, bringe ich ein einfaches Argument für die Existenz einer solchen Funktion, dessen Idee aus [66 p.292] stammt. Es sei $QC := (H^\infty + C) \cap \overline{H^\infty + C}$. Trivialerweise gilt $C \subset QC$.

Behauptung: $\exists f \in H^\infty \setminus C$ mit $\operatorname{Re} f \in C \Leftrightarrow C \not\subset QC$.

Beweis: Ich brauche nur " $\Leftarrow$ " (" $\Rightarrow$ " ist in [G p.377]).

Sei $g \in QC \setminus C$, $u := \operatorname{Re} g$, $v := \operatorname{Im} g \Rightarrow u, v \in H^\infty + C$ und $[u \notin C \text{ oder } v \notin C]$. Sei etwa $u \notin C$ (sonst analog). Schreibe $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in H^\infty$, $u_2 \in C \Rightarrow u_1 \in H^\infty \setminus C$. Weiter ist $0 = \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u_1 + \operatorname{Im} u_2$, $\operatorname{Im} u_2 \in C \Rightarrow \operatorname{Im} u_1 \in C$. $f := iu_1$ leistet das Gewünschte.

Lemma 1: $C \not\subset QC$.

Lemma 2: $\exists f \in H^2$ mit $\operatorname{Re} f \in C$ und $e^f \notin A$. (A ist die Disk-Algebra).

Beweis von Lemma 2:

Sei $f(z) = i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln n}$; $f \in H^2$ ist trivial.

Setze $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$. Es ist

$$u(re^{i\theta}) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n \sin n\theta}{n \ln n} \xrightarrow{r \rightarrow 1} -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n \ln n} =: u(e^{i\theta})$$

für alle θ (die Reihe rechts konvergiert für alle θ ; Abelscher Grenzwertsatz). Da die rechte Reihe sogar gleichmäßig auf T konvergiert [Z V.1 thm. 3] ist $u(e^{i\theta})$ stetig auf T , d.h. $u \in C$.

Weiter ist $v(re^{i\theta}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n \ln n}$, also für

$$\theta = 0: v(r) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{n \ln n} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

(diese Verallgemeinerung des Abelschen Grenzwertsatzes ist für nichtnegative Koeffizienten trivial).

Da $u(r) = 0$ ($0 \leq r < 1$), existiert $\lim_{r \rightarrow 1} e^{f(r)} = \lim_{r \rightarrow 1} e^{iv(r)}$ nicht

($v(r)$ stetig auf $[0,1)$, $\lim_{r \rightarrow 1} v(r) = \infty$)

Also ist $e^f \notin A$.

Beweis von Lemma 1: Sei f wie in Lemma 2, $u := \operatorname{Re} f \in C, v := \operatorname{Im} f$.

Dann ist $e^{iv} \notin C$, sonst wäre $e^f = e^u e^{iv} \in H^\infty \cap C = A$, Widerspruch.

$e^{iv} \in QC$, denn

$e^{iv} = \underbrace{e^f}_{\in H^\infty} \underbrace{e^{-u}}_{\in C} \in H^\infty + C$, da $H^\infty + C$ Algebra ist [66 p.290]. Analog

$e^{-iv} = \underbrace{e^{-f}}_{\in H^\infty} \underbrace{e^u}_{\in C} \in H^\infty + C \Rightarrow e^{iv} \in \overline{H^\infty + C} \Rightarrow e^{iv} \in QC \setminus C$, q.e.d.

Hilfssatz: $1^0 \exists f \in H^\infty \setminus C$ mit $\operatorname{Re} f \in C$.

$2^0 \exists u \in C(T, \mathbb{R})$ mit (Randwert des) Cauchy-Integral(s)

$C[u] \in H^\infty \setminus C$.

Beweis: 1^0 ist Lemma 1 im Lichte der vorangehenden Behauptung.

1^0 und 2^0 sind aber "äquivalent": Sei $Q_r(t) := \frac{2r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2}$

der konjugierte Poissonkern, m.a.W. $P_r(t) + iQ_r(t) =$

$= \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}$ der analytisch ergänzte Poissonkern. Die behauptete

Äquivalenz folgt aus der Gleichung $P_r + iQ_r = 2C_r - 1$. Q.e.d.

Beweis des Satzes: Nach Hilfssatz 2^0 gibt es $u \in C$ mit

$C[u] \in H^\infty \setminus C$. Sei $Y := C(T)$ und $\varphi: T \rightarrow Y$, $\varphi(e^{i\theta})(e^{i\omega}) := u(e^{i(\theta-\omega)})$.

φ ist stetig, da u gleichmäßig stetig ist.

Es ist $f(z) (e^{i\omega}) = C[\varphi](z) (e^{i\omega}) =$

$$= \left[\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right] (e^{i\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\zeta) (e^{i\omega})}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{u(\xi e^{-i\omega})}{\xi - z} d\xi \quad \left| \begin{array}{l} \zeta = e^{i\omega} \xi \\ d\zeta = e^{i\omega} d\xi \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{u(\xi) e^{i\omega}}{e^{i\omega} (\xi - z e^{-i\omega})} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{u(\xi)}{\xi - z e^{-i\omega}} d\xi = C[u](z e^{-i\omega})$$

Daraus folgt zunächst $f \in H^\infty(Y)$, da $C[u] \in H^\infty$.

Annahme: $\exists \theta_0$ mit $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) =: y_0$ existiert schwach in $Y \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \theta \in T:$

$$C[u](re^{i\theta}) = f(re^{i\theta_0}) (e^{i(\theta_0 - \theta)}) \xrightarrow{r \rightarrow 1} y_0 (e^{i(\theta_0 - \theta)}),$$

also hätte $C[u]$ doch stetige Randwerte $\{y_0 \in Y : y_0 = C(T)!\}$, Widerspruch.

Der folgende Satz steht im Kontrast zur L^1 -bzw. L^1/H^1_0 -Situation (3.10).

(4.6) Satz: Sei $R: H^1 \rightarrow Y$. Man betrachte folgende Aussagen:

1^o R schwach kompakt

2^o R darstellbar durch $\bar{H}^\infty(Y)$ -Funktion

2^o R darstellbar durch $L^\infty(Y)$ -Funktion

3^o R ist Dunford-Pettis-Operator (s. (3.10)).

Es gilt:



Beweis: $2^\bullet \Rightarrow 2^\circ$ trivial

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ folgt, wie schon vermerkt, aus der analogen Aussage für Operatoren $L^1 \rightarrow Y$: $R: H^1 \rightarrow Y$ darstellbar durch $L^\infty(Y)$ -Funktion $\Rightarrow R$ fortsetzbar zu darstellbarem $\tilde{R}: L^1 \rightarrow Y$ (3.10) $\tilde{R}$ D.P. $\Rightarrow R = \tilde{R}|_{H^1}$ D.P.

$2^\bullet \Rightarrow 3^\circ$ ist nun klar.

Wegen des schon Bewiesenen genügt es, von den "Negativ-Implikationen" folgende zu zeigen:

$$1^\circ \not\vdash 3^\circ, 2^\bullet \not\vdash 1^\circ, 2^\circ \not\vdash 2^\bullet, 3^\circ \not\vdash 1^\circ, 3^\circ \not\vdash 2^\circ.$$

Ein Banachraum X hat die Dunford-Pettis-Eigenschaft (D.P.P.)

[35]: $\Leftrightarrow \forall Y$ schwach kompakten $R: X \rightarrow Y: R$ ist D.P.

X hat die Schur-Eigenschaft: $\Leftrightarrow$ in X stimmen schwache und starke Folgenkonvergenz überein.

$1^\circ \not\vdash 3^\circ$: Zu zeigen ist, daß H^1 nicht die D.P.P. hat.

Annahme: H^1 hat D.P.P. $\Rightarrow$ das Prädual C/A_0 von H^1 hat D.P.P.

[35 cor.p.136]. Da $(C/A_0)' = H^1$ separabel ist, folgt aus

[53 prop.1.2], daß H^1 die Schur-Eigenschaft hat, was nicht der Fall ist $((e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}_0} !)$.

$2^\bullet \not\vdash 1^\circ$: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n := [2^{-n}, 2^{-n+1})$ $2\pi \in T = [0, 2\pi)$ und $g_n \in \bar{H}^\infty \subset L^\infty$ mit $|g_n| = \chi_{T_n} + 2^{-n} \chi_{T \setminus T_n}$ f.ü. (äußere Funktion [R thm. 17.16]!).

Da $\sum_{n=1}^\infty |g_n| \leq 2$ f.ü., ist $g := (g_n)_{n \in \mathbb{N}}: T \rightarrow l^1$ wohldefiniert und

$g \in \bar{H}^\infty(l^1)$.

Behauptung: Der durch g dargestellte Operator $R: H^1 \rightarrow l^1$, $f \mapsto ffgd\lambda$ ist nicht schwach kompakt, d.h. nicht kompakt (l^1 hat die Schur-Eigenschaft!).

Beweis: Seien $f_n := 2^n \bar{g}_n \in H^1 (n \in \mathbb{N})$;

$$\|f_n\|_1 = \int_T |f_n| d\lambda = \int_{T_n} |\bar{f}_n| d\lambda + \int_{T \setminus T_n} |f_n| d\lambda \leq 2.$$

$\{Rf_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht relativ kompakt in l^1 :

$$Rf_n = \left(\int_T f_n g_k d\lambda \right)_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow \text{die } n. \text{ Komponente von } Rf_n$$

$$(Rf_n)_n = \int f_n g_n d\lambda = 2^n \int_T |g_n|^2 d\lambda \geq 2^n \int_{T_n} |g_n|^2 d\lambda = 1$$

Daraus folgt die Behauptung.

2° $\nrightarrow$ 2°: Wähle $\varphi \in L^\infty(Y)$ mit $C[\varphi] \notin H^\infty(Y)$.

Ein solches φ existiert für jeden Banachraum $Y \neq 0$, da es schon

für $Y = \mathbb{C}$ existiert [Ho p.150]. Der durch φ dargestellte Ope-

erator $R: \bar{H}^1 \rightarrow Y$, $f \mapsto \int f \varphi d\lambda$ ist nicht durch ein $\psi \in H^\infty(Y) = L^\infty_a(Y)$

darstellbar. Das würde bedeuten $\int f \varphi d\lambda = \int f \psi d\lambda \quad \forall f \in \bar{H}^1$. Da

$(e^{it} \mapsto C_r(\theta - t)) \in \bar{H}^1$ (s. Beweis von Satz (4.4)), würde folgen

$C[\varphi] = C[\psi] = \psi \in H^\infty(Y)$, Widerspruch.

3° $\nrightarrow$ 2°: Nach der Hardyschen Ungleichung [Ho p.70] ist der

"Hardy-Operator" $H: H^1 \rightarrow l^1$, $f \mapsto \left(\frac{\hat{f}(n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert und be-

beschränkt. Im nächsten Satz wird gezeigt, daß H nicht auf L^1

stetig linear fortsetzbar ist, also wird H nicht durch eine

$L^\infty(l^1)$ -Funktion dargestellt. Andererseits ist jeder l^1 -wertige

Operator Dunford-Pettis, da l^1 die Schur-Eigenschaft hat. Q.e.d.

(4.7) Satz: Für $1 \leq p < \infty$ ist der "Hardy-Operator" $H: H^1 \rightarrow l^p$,

$f \mapsto \left(\frac{\hat{f}(n)}{n^{1/p}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert, beschränkt und nicht stetig linear

auf L^1 fortsetzbar.

Für $p=2$ ist der Satz in [43 p.301] zu finden. Der dortige Beweis geht mittels der Theorie absolut summierender Operatoren mit Werten im Hilbertraum.

Für $p=1$ stammt ein Beweis von Wojtaszczyk [mündliche Mitteilung]. Er verwendet den schönen Trick des Rudinschen Beweises des Satzes von Newman [Ho p.154]: Wäre $H: H^1 \rightarrow l^1$ auf L^1 stetig linear fortsetzbar, so würde auch die "kanonische" Fortsetzung $L^1 \rightarrow l^1$, $f \mapsto (\frac{\hat{f}(n)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ existieren, und das ist nicht der Fall:

Nach [Du p.63f.] ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n \theta}{\ln n}$ die Fourierreihe einer L^1 -Funktion, aber $\sum \frac{1}{n \ln n} = \infty$.

Für den Beweis des Satzes brauche ich folgende einfache Vorbemerkung über das (projektive) Tensorprodukt $X \hat{\otimes} Y$ von Banachräumen X, Y [DU VIII]:

1° [DU VIII.2.2] $(X \hat{\otimes} Y)' \longrightarrow L(X, Y')$, $\psi' \mapsto \psi$,

wobei $\langle y, \psi x \rangle := \langle x \otimes y, \psi' \rangle$, ist isometrischer Isomorphismus.

2° [DU VIII.1.10] $L^1 \hat{\otimes} Y \longrightarrow L^1(Y)$, $f \otimes y \mapsto f(\cdot)y$ ist isometrischer Isomorphismus.

Beweis des Satzes: Nach der Hardyschen Ungleichung [Ho p.70]

ist für $f \in H^1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n} \leq \pi \|f\|_1$. Außerdem ist natürlich

$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall f \in L^1$. Damit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|^p}{n^{1/p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n} |\hat{f}(n)|^{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n} \|f\|_1^{p-1} \leq$$

$\leq \pi \|f\|_1^p$ für $f \in H^1$, also ist $H: H^1 \rightarrow l^p$ wohldefiniert

und beschränkt.

Annahme, H ist fortsetzbar zu $\tilde{H} \in L(L^1, l^p)$. Sei $C := \|\tilde{H}\|$.

1. Fall: $p = 1$. Seien e_k die Einheitsvektoren in c_0 .

Für $n \in \mathbb{N}$ hat man

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \left| \sum_{k=1}^n \langle e_k, H e^{ik\theta} \rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^n \langle e_k, \tilde{H} e^{ik\theta} \rangle \right| \leq$$

$$\leq C \sup_{\substack{R \in L(L^1, l^1) \\ \|R\| \leq 1}} \left| \sum_{k=1}^n \langle e_k, R e^{ik\theta} \rangle \right|$$

$$\stackrel{1^\circ}{=} C \left\| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} e_k \right\|_{L^1 \wedge c_0}$$

$$\stackrel{2^\circ}{=} C \left\| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} e_k \right\|_{L^1(c_0)} = C,$$

Widerspruch ($n \rightarrow \infty$).

2. Fall: $1 < p < \infty$. Seien e_k die Einheitsvektoren in l^q ,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Eine direkte Kopie des 1. Falls führt nur zu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1/p}} = \left| \sum_{k=1}^n \langle e_k, H e^{ik\theta} \rangle \right| \leq$$

$$\leq C \left\| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} e_k \right\|_{L^1(l^q)} = C n^{1/q},$$

und das ist für $n \rightarrow \infty$ kein Widerspruch. Aber (Zwischenschritte wie im 1. Fall)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \left| \sum_{k=1}^n k^{1/p-1} \langle e_k, H e^{ik\theta} \rangle \right|$$

$$\leq C \left\| \sum_{k=1}^n k^{-1/q} e^{ik\theta} e_k \right\|_{L^1(l^q)} = C \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^{1/q},$$

und das ist ein Widerspruch ($n \rightarrow \infty$).

(4.8) Tensorprodukte

Auf den letzten Beweis bin ich bei der Untersuchung der Frage gekommen, ob $H^1 \hat{\otimes} Y = H^1(Y)$ ist (unter der kanonischen stetigen linearen Abbildung $H^1 \hat{\otimes} Y \rightarrow H^1(Y)$, $f \otimes y \mapsto f(\cdot)y$. Die Zeichen " $\approx$ " bzw. " $=$ " bedeuten in diesem Zusammenhang im folgenden stets "isomorph bzw. isometrisch isomorph unter der kanonischen Abbildung"). Diese Frage stellt sich in natürlicher Weise, weil $L^1 \hat{\otimes} Y = L^1(Y)$ stets gilt [DU VIII.1.10].

Ich beginne mit einem allgemeinen Lemma, das man aus dem Beweis von [36 prop.1] (isometrische Version) bzw. aus [Kö § 41.5(9) in Verb. mit p.191 unten] (isomorphe Version) herauslesen kann:

Lemma: Seien X, Y Banachräume, $X_0 \subset X$ Unterbanachraum.

Sei $i: X_0 \hookrightarrow X$ die Inklusion, $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ die Identität und $J := i \hat{\otimes} \text{id}_Y: X_0 \hat{\otimes} Y \rightarrow X \hat{\otimes} Y$ die dadurch induzierte lineare Abbildung von Norm ≤ 1 . Dann gilt:

J ist Isomorphismus aufs Bild (Isometrie) $\Leftrightarrow$ jedes $R \in L(X_0, Y')$ hat Fortsetzung zu $\tilde{R} \in L(X, Y')$ (mit gleicher Norm).

Dies wird auf $X_0 := H^1$, $X := L^1$ angewandt. Man erhält den

Satz: Sei Y Banachraum.

$H^1 \hat{\otimes} Y \approx (=) H^1(Y) \Leftrightarrow$ jedes $R \in L(H^1, Y')$ hat Fortsetzung zu $\tilde{R} \in L(L^1, Y')$ (mit gleicher Norm).

Beweis: Man betrachte folgendes kommutative Diagramm von stetigen linearen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} H^1 \hat{\otimes} Y & \xrightarrow{J} & L^1 \hat{\otimes} Y \\ h \downarrow & & \downarrow l \\ H^1(Y) & \xrightarrow{I} & L^1(Y) \end{array}$$

Dabei sind h bzw. l die kanonischen Abbildungen

$f \otimes y \mapsto f(\cdot)y$, J ist die Abbildung aus dem Lemma,

$I: H^1(Y) = L_a^1(Y) \hookrightarrow L^1(Y)$ die Inklusion. Nach [DU VIII.1.10]

ist l isometrischer Isomorphismus. I ist trivialerweise Isometrie.

Ich erinnere daran, daß " $H^1 \hat{\otimes} Y \cong (=) H^1(Y)$ " bedeutet

" h ist (isometrischer) Isomorphismus". Da h dichtes Bild hat

(es umfaßt den nach Lemma (3.2) dichten Teilraum der Y -wertigen analytischen Polynome), folgt nun leicht:

h ist (isometrischer) Isomorphismus $\Leftrightarrow$

J ist (isometrischer) Isomorphismus aufs Bild

$\Longleftrightarrow \forall R \in L(H^1, Y')$ haben Fortsetzung zu $\tilde{R} \in L(L^1, Y')$ (mit gleichem Lemma

cher Norm), q.e.d.

Bemerkung: Der Beweis zeigt, daß auch gilt:

$H^1 \hat{\otimes} Y \cong (=) H^1(Y) \Leftrightarrow J: H^1 \hat{\otimes} Y \rightarrow L^1 \hat{\otimes} Y$ ist Isomorphismus aufs Bild (Isometrie).

(4.9) Beispiele

a) Sei μ ein beliebiges (positives) Maß. Man betrachte folgende Kette von kanonischen Isometrien:

$$\begin{aligned} H^1 \hat{\otimes} L^1(\mu) &= L^1(\mu) \hat{\otimes} H^1 = L^1(\mu, H^1) \subset L^1(\mu, L^1) = \\ &= L^1(\mu) \hat{\otimes} L^1 = L^1 \hat{\otimes} L^1(\mu) \end{aligned}$$

Es ist trivial nachzuprüfen, daß die Gesamtabbildung gerade die kanonische Abbildung $J: H^1 \hat{\otimes} L^1(\mu) \longrightarrow L^1 \hat{\otimes} L^1(\mu)$ ist.

Aus der letzten Bemerkung folgt $H^1 \hat{\otimes} L^1(\mu) = H^1(L^1(\mu))$.

- b) Für σ -endliches μ oder μ =Zählmaß auf einer (beliebigen) Menge kann man a) auch aus dem letzten Satz ableiten, denn dann ist $L^1(\mu)' = L^\infty(\mu)$, und es ist bekannt, daß in diesen beiden Fällen $L^\infty(\mu)$ die "Fortsetzungseigenschaft" hat [52 p.29f.]*:

Ein Banachraum Z hat die Fortsetzungseigenschaft: $\Leftrightarrow$

$\forall$ Banachrauminklusionen $X_0 \subset X \quad \forall R \in L(X_0, Z) \quad \exists$ Fortsetzung $\tilde{R} \in L(X, Z)$ mit gleicher Norm.

Aus Satz (4.8) folgt $H^1 \hat{\otimes} Y = \hat{H}^1(Y)$, falls Y' die Fortsetzungseigenschaft hat.

- c) Genauso folgt $H^1 \hat{\otimes} Y \approx \hat{H}^1(Y)$, falls Y' injektiver Banachraum ist [LTI 2.f.1, 2.f.2]

- d) Nach dem Beweis von Satz (4.2) 1^0 ist $\text{id}: H^1 \rightarrow H^1 = (C/A_0)'$ nicht fortsetzbar, also ist $H^1 \hat{\otimes} C/A_0 \neq H^1(C/A_0)$.

- e) Nach Satz (4.7) ($p=1$) ist $H: H^1 \rightarrow l^1 = c_0'$ nicht fortsetzbar, also ist $H^1 \hat{\otimes} c_0 \neq H^1(c_0)$.

- f) Nach Satz (4.7) ($1 < p < \infty$) ist $H: H^1 \rightarrow l^p = l^q'$ nicht fortsetzbar, also ist $H^1 \hat{\otimes} l^q \neq H^1(l^q)$, $1 < q < \infty$.

* In [52] wird nur der reelle Fall behandelt. Der komplexe (und der reelle) Fall folgt aber aus Lemma (4.8) und [DU VIII.1.11]. (Der Fall $l^\infty(\Gamma)$ ist sowieso trivial).

g) Da l^1 als Dualraum komplementiert in $l^{1''} = l^{\infty'}$ liegt, ist auch $H^1 \xrightarrow{H} l^1 \hookrightarrow l^{\infty'}$ nicht auf L^1 fortsetzbar, also ist $H^1 \hat{\otimes} l^{\infty} \neq H^1(l^{\infty})$.

h) Bourgain bemerkt in [9 p.321], daß $H^1 \rightarrow H^{\infty}$,
 $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{n} z^n$ nicht auf L^1 fortsetzbar ist.

Es folgt $H^1 \hat{\otimes} L^1 /_{H^1_0} \neq H^1(L^1 /_{H^1_0})$.

Bemerkung: Die Schlußweise in g) lautet allgemein so: Seien Y, Z Banachräume mit $Y' \hookrightarrow Z'$ (dies ist natürlich insbesondere der Fall für $Y \hookrightarrow Z$, oder für $Z=Y''$). Dann folgt aus $H^1 \hat{\otimes} Z \cong H^1(Z)$ auch $H^1 \hat{\otimes} Y \cong H^1(Y)$. Der Beweis ist mit Satz (4.8) trivial.

Als weitere Räume Y mit $H^1 \hat{\otimes} Y \cong H^1(Y)$ erhält man wegen d) - h) oben z.B. L^{∞}/H^{∞}_0 , $c_0(\Gamma)$, $C, A, l^q(\Gamma)$, L^q ($1 < q \leq \infty$), H^{∞} , $H^{\infty'}$.

(4.10) Zum Schluß dieses Paragraphen möchte ich noch vermerken, daß mein anfänglicher Grund für die Untersuchung der Tensorprodukte die in (3.2) gestellte Frage war: $Y \text{ RNP} \stackrel{?}{\Rightarrow} H^1(Y) \text{ RNP}$, bzw. der Spezialfall $Y=X'$. Dort wurde gezeigt, daß die Antwort für separables X' positiv ist.

Andererseits hat nach [DU VIII.4.7] mit X' auch $H^1 \hat{\otimes} X'$ stets die RNP (H^1 besitzt eine Basis [73 p.16f] und damit die Approximations-Eigenschaft). Leider folgt aber aus (4.9), daß $H^1 \hat{\otimes} Y$ "selten" (kanonisch) isomorph zu $H^1(Y)$ ist. An konkreten Dualräumen X' mit RNP, für die $H^1 \hat{\otimes} X' \cong H^1(X')$ gilt, hat man nur $X' = l^1(\Gamma)$, und die RNP für $H^1(l^1(\Gamma))$ folgte schon in (3.2) in einfacher Weise aus dem separablen Fall.

§ 5: Analytische Projektion

Unter der analytischen Projektion einer harmonischen Funktion $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ versteht man die holomorphe Funktion

$$f^a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \text{ Analog versteht man unter der analytischen}$$

Projektion einer integrierbaren Funktion f auf T mit Fourierreihe $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, falls existent, die integrierbare

analytische Funktion f^a auf T mit Fourierreihe

$$f^a(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \text{ (Für ein trigonometrisches Polynom}$$

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta} \text{ ist also } f^a \text{ das analytische Polynom}$$

$$f^a(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^N a_n e^{in\theta}.$$

Der berühmte Satz von M. Riesz [Ho p.151f.] besagt, daß die analytische Projektion L^p beschränkt nach L^p transformiert ($1 < p < \infty$; für $p=1$ oder ∞ wird das falsch [Ho p.150]). In diesem Paragraphen untersuche ich die entsprechende vektorwertige Fragestellung.

Sei $p \in (1, \infty)$. Gilt das Analogon des Satzes von M. Riesz für $L^p(X)$ -Funktionen, so sage ich kurz "X hat die analytische Projektion (p)". Eine einfache Rechnung zeigt, daß jeder $L^p(\mu)$ -Raum die analytische Projektion (p) hat (5.2).

Schon Bukhvalov [15] hat gezeigt, daß die Beschränktheit der analytischen Projektion $\mathcal{H}^p(Y) \rightarrow \mathcal{H}^p(Y)$ äquivalent ist zu ihrer Beschränktheit $h^p(Y) \rightarrow h^p(Y)$. Ich kann als dazu äquivalente Bedingungen noch angeben (5.3): $\mathcal{H}^p(Y)$ komplementiert in $\mathcal{H}^p(Y) = L^p(Y)$, $\mathcal{H}^p(Y)$ komplementiert in $h^p(Y)$.

Die Beschränktheit der analytischen Projektion bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist auch äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit der Partialsommenoperatoren der Fourierreihe bzgl. $\|\cdot\|_p$. Dies liefert einen bequemen Beweis der von Bukhvalov [15] stammenden Dualitätsaussage (5.4).

Es ist im allgemeinen Bewußtsein, aber m.W. nirgendwo mit (zitierbarem) Beweis aufgeschrieben, daß die analytische Projektion "äquivalent" ist zur Zuordnung der harmonischen Konjugierten (was trivial ist: (5.5)), aber auch zu den singulären Integraloperatoren Konjugation, Hilberttransformation auf T und auf $\mathbb{R}$. Diese Äquivalenzen werden in Satz (5.6) ausführlich formuliert und in (5.7)-(5.8) vollständig bewiesen. Daraus folgt zum einen, daß die Existenz der analytischen Projektion (p) nicht von $p \in (1, \infty)$ abhängt. Insbesondere hat $L^p(\mu)$ ($1 < p < \infty$) die analytische Projektion (q) für alle $q \in (1, \infty)$ (5.9).

Zum anderen wird dadurch der Anschluß an jüngste Entwicklungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Geometrie der Banachräume hergestellt. Ich verweise dazu auf die Diskussion in Abschnitt (5.10). Ihr Fazit ist, daß modulo dem Folklore-Satz (5.6) aus den Arbeiten von Burkholder [17] ($\Leftarrow$) und Bourgain [8] ($\Rightarrow$) folgt, daß die Existenz der analytischen Projektion äquivalent ist zur wahrscheinlichkeitstheoretischen "UMD"-Bedingung. Da weiter bekannt ist, daß UMD-Räume superreflexiv sind, können insbesondere B (Präduale von JT [46]), L^1 , c_0 , l^1 die analytische Projektion nicht haben. Dies konnte ich kurz vor dem Erscheinen von Bourgain's Arbeit [8] auch direkt zeigen. Meine Beispiele liefern für diese Räume noch etwas mehr, näm-

lich das Scheitern der analytischen Projektion in drastischer Weise (5.12)-(5.14), (6.9), was auch im nächsten Paragraphen noch eine Rolle spielen wird (6.8).

Über vektorwertige singuläre Integraloperatoren, insbesondere Hilberttransformation, gibt es eine umfangreiche Literatur: neben den schon zitierten Quellen etwa [DS XI.11 p.1164ff.], [5], [10], [13], [19], [37], [51], [60], [61], [62].

Für die Zusammenhänge mit Wahrscheinlichkeitstheorie (UMD) und Geometrie in Banachräumen verweise ich auch auf die in [17] angegebene Literatur.

(5.1) Definition-Lemma: Sei X Banachraum.

1° a) Sei $f: D \rightarrow X$ harmonisch mit Reihe $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$

(s. (1.3)). Die holomorphe Funktion $f^a: D \rightarrow X$,

$f^a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heißt die analytische Projektion von f .

b) Sei $f \in L^1(X)$ mit Fourierreihe $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$

Existiert $f^a \in L^1(X)$ mit Fourierreihe $f^a(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$

($\Rightarrow f^a \in L^1_a(X)$), so heißt f^a die analytische Projektion von f .

Ist speziell $f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta}$ ein X -wertiges trigono-

metrisches Polynom, so ist $f^a(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^N a_n e^{in\theta}$.

2° Sei $1 < p < \infty$. X hat die analytische Projektion (p) , falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

a) $f \mapsto f^a$ ist auf den X -wertigen harmonischen Polynomen

$$\left\{ \sum_{n=-N}^N a_n r^{|n|} e^{in\theta} : N \in \mathbb{N}_0, a_n \in X \right\} \text{ beschränkt bzgl. } \|\cdot\|_p.$$

a') $\forall f \in \mathbb{H}^p(X)$ ist $f^a \in \mathbb{H}^p(X)$ und $A : \mathbb{H}^p(X) \rightarrow \mathbb{H}^p(X)$,
 $f \mapsto f^a$ ist beschränkt.

b) $f \mapsto f^a$ ist auf den X -wertigen trigonometrischen Polynomen
 beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_p$.

b') $\forall f \in L^p(X) \exists f^a \in L^p(X)$ mit $f^a(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$

und $A : L^p(X) \rightarrow L^p(X)$, $f \mapsto f^a$ ist beschränkt.

c) Das Cauchy-Integral (2.1) ist ein beschränkter Operator
 $C : L^p(X) \rightarrow \mathbb{H}^p(X)$, $f \mapsto C[f]$.

Beweis:

a) $\Leftrightarrow$ b): Nach Satz (1.5) ist das Poisson-Integral isometrischer

$$\begin{array}{ccc} \text{Isomorphismus } (\{\text{trig.Poly.}\}, \|\cdot\|_p) & \xrightarrow{P} & (\{\text{harm.Poly.}\}, \|\cdot\|_p) \\ \downarrow A & & \downarrow A \end{array}$$

$$\text{ebenso} \quad L_a^p(X) \quad \xrightarrow{P} \quad \mathbb{H}^p(X),$$

und dieses Diagramm kommutiert. Daher a) $\Leftrightarrow$ b).

b) $\Rightarrow$ b'): Nach Voraussetzung ist

$$A_0 : (\{\text{trig.Poly.}\}, \|\cdot\|_p) \longrightarrow L^p(X), f \mapsto f^a \text{ stetig.}$$

Da die trigonometrischen Polynome dicht in $L^p(X)$ liegen

(Lemma (3.2)), hat A_0 eine stetige lineare Fortsetzung

$A_1 : L^p(X) \rightarrow L^p(X)$. Es bleibt zu zeigen, daß $A_1 = A$. Sei dazu

$$F_n : L^p(X) \rightarrow X, f \mapsto \hat{f}(n) \text{ und } F_n^+ : L^p(X) \rightarrow X, f \mapsto \begin{cases} \hat{f}(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

F_n, F_n^+ sind stetig (da sie es offenbar auf $L^1(X)$ sind)

$$\text{und } \{\text{trig. Poly.}\} \xrightarrow{A_0} L^p(X)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ F_n^+ & \searrow & \\ & X & \swarrow \\ & & F_n \end{array} \quad \text{komm utiert,}$$

also auch

$$\begin{array}{ccc} L^p(X) & \xrightarrow{A_1} & L^p(X) \\ F_n^+ & \searrow & \\ & X & \swarrow \\ & & F_n \end{array} \quad , \text{ d.h. } A_1 = A.$$

b') $\Rightarrow$ a'): Sei $H(X) := \{f : D \rightarrow X \text{ holomorph}\}$. Gilt b'), so folgt a') aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^p(X) & \xrightarrow{A} & L_a^p(X) \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \mathbb{H}^p(X) & \xrightarrow{A} & H(X) . \end{array}$$

a') $\Leftrightarrow$ c) folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^p(X) & & \\ \downarrow P & \searrow C & \\ \mathbb{H}^p(X) & \xrightarrow{A} & H(X) , \text{ q.e.d.} \end{array}$$

Zusatz:

1° Ein simples Graphensatz-Argument zeigt, daß zu den obigen Bedingungen auch die folgenden äquivalent sind:

a'') $\forall f \in \mathbb{H}^p(X)$ ist $f^a \in \mathbb{H}^p(X)$.

b'') $\forall f \in L^p(X) \exists f^a \in L^p(X)$ mit

$$f^a(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} .$$

c') $\forall f \in L^p(X)$ ist $C[f] \in \mathbb{H}^p(X)$.

2° Aus 1° folgt, daß die Existenz der analytischen Projektion (p) separabel determiniert ist, d.h. X hat sie schon dann, wenn sie jeder separable Teilraum hat.

(5.2) Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ beliebiger (positiver) Maßraum; X habe die analytische Projektion (p). Dann hat auch $Y := L^p(\mu, X)$ die analytische Projektion (p).

Corollar: $L^p(\mu)$ hat die analytische Projektion (p), μ beliebiges Maß.

Beweis des Satzes: Wegen Zusatz 2° von eben und [DS III.8.5] kann man μ als σ -endlich annehmen. Ich verwende Definition b)

aus (5.1)2°. Sei A_p die Norm der analytischen Projektion

$A: L^p(X) \rightarrow L^p(X)$, und sei $f(\theta) := \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} y_n$

$(N \in \mathbb{N}_0, y_n \in Y = L^p(\mu, X))$ ein trigonometrisches Polynom.

Für alle $\theta \in T$ ist $f(\theta) \in Y = L^p(\mu, X)$ die Funktion

$\Omega \ni \omega \mapsto f(\theta)(\omega) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} y_n(\omega) \in X$ und $f^a(\theta) \in Y = L^p(\mu, X)$

die Funktion $\Omega \ni \omega \mapsto f^a(\theta)(\omega) = \sum_{n=0}^N e^{in\theta} y_n(\omega) \in X$.

Damit hat man $\|f^a(\theta)\|_Y^p = \int_{\Omega} \left\| \sum_{n=0}^N e^{in\theta} y_n(\omega) \right\|_X^p d\omega$

$$\Rightarrow \|f^a\|_{L^p(Y)}^p = \int_T \int_{\Omega} \left\| \sum_{n=0}^N e^{in\theta} y_n(\omega) \right\|_X^p d\omega \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\text{Fubini} \quad = \int_{\Omega} \int_T \left\| \sum_{n=0}^N e^{in\theta} y_n(\omega) \right\|_X^p \frac{d\theta}{2\pi} d\omega$$

$$\leq \int_{\Omega} A_p^p \int_T \left\| \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} y_n(\omega) \right\|_X^p \frac{d\theta}{2\pi} d\omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{Fubini} &= A_P^P \int_T \int_{\Omega} \|f(\theta)(\omega)\|_X^P d\omega \frac{d\theta}{2\pi} \\
 &= A_P^P \int_T \|f(\theta)\|_Y^P \frac{d\theta}{2\pi} \\
 &= A_P^P \|f\|_{L^P(Y)}^P, \text{ q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Die Aussage $1^\circ \Rightarrow 1^*$ des folgenden Satzes stammt für Dualräume von Bukhvalov [15 thm.3.1]. Der Satz bestätigt weiter die "Philosophie" [Ho p.155], wonach ein Hardy-Raum in seinem entsprechenden Oberraum von harmonischen Funktionen nur dann komplementiert ist, wenn er es durch die analytische Projektion ist.

(5.3) Satz: Für einen Banachraum Y und $1 < p < \infty$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° $A: \mathfrak{h}^P(Y) \rightarrow \mathfrak{H}^P(Y)$ wohldefiniert und beschränkt
(d.h. Y hat die analytische Projektion (p)).

1* $A: h^P(Y) \rightarrow H^P(Y)$ wohldefiniert und beschränkt.

2° $\mathfrak{H}^P(Y)$ ist in $\mathfrak{h}^P(Y)$ komplementiert.

2* $H^P(Y)$ ist in $h^P(Y)$ komplementiert.

Beweis:

1° $\Rightarrow$ 1° ist klar (verwende Bedingung a) in (5.1)2°).

1° $\Rightarrow$ 1*: Sei $Y \subset X'$ und $u \in h^P(Y)$, $u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ ($a_n \in Y$).

Für $R < 1$ sei $u_R(z) := u(Rz) \Rightarrow u_R \in \mathfrak{h}^P(Y)$,

$u_R(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R^{|n|} r^{|n|} e^{in\theta}$ und $\|u_R\|_p \leq \|u\|_p$ ((1.4)2°).

Nach Voraussetzung ist $u_R^a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n z^n$ in $H^p(Y)$

und $\|u_R^a\|_p \leq A_p \|u_R\|_p \leq A_p \|u\|_p$ (A_p Konstante).

Sei $\varphi_R \in L_{Y,a}^p(X', X)$ mit $P[\varphi_R] = u_R^a$ (Satz (2.5)).

Dann ist $\hat{\varphi}_R(n) = \begin{cases} a_n R^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ (Lemma (1.2)).

P Isometrie $\Rightarrow \|\varphi_R\|_p = \|u_R^a\|_p \leq A_p \|u\|_p$.

Nach Banach-Alaoglu $\exists \varphi \in L^p(X', X)$, $\|\varphi\|_p \leq A_p \|u\|_p$, das

$\sigma(L^p(X', X), L^q(X))$ -Häufungspunkt von $(\varphi_R)_{R < 1}$ ist.

Es folgt $\hat{\varphi}(n) = \begin{cases} a_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$:

Sei nämlich $n \in \mathbb{Z}$ fest und $x \in X$. Setze $\psi(e^{i\theta}) := e^{-in\theta} x \Rightarrow$

$\psi \in L^q(X) \Rightarrow$

$\langle x, \hat{\varphi}(n) \rangle = \langle x, (G) \int e^{-int} \varphi(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \rangle = \int \langle \psi(e^{it}), \varphi(e^{it}) \rangle \frac{dt}{2\pi}$

$= \langle \psi, \varphi \rangle$ ist Häufungspunkt $(R \rightarrow 1)$ von

$\langle \psi, \varphi_R \rangle = \langle x, \hat{\varphi}_R(n) \rangle = \begin{cases} \langle x, a_n R^n \rangle, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \xrightarrow{R \rightarrow 1} \begin{cases} \langle x, a_n \rangle, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$.

Also ist $\varphi \in L_{Y,a}^p(X', X)$, $P[\varphi] = u^a \in H^p(Y)$, $\|u^a\|_p = \|\varphi\|_p$

$\leq A_p \|u\|_p$, q.e.d.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ und $1^* \Rightarrow 2^*$ sind trivial.

Bisher ist gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} 1^\circ & \Leftrightarrow & 1^* \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 2^\circ & & 2^* \end{array}$$

Um von unten nach oben zu kommen, benutze ich die Idee von

Rudin [Ho p.154f.]: Gibt es irgendeine beschränkte Projektion S ,

so definiert man durch ein vektorwertiges Integral eine eben-

falls beschränkte Projektion $\tilde{S}$, von der man zum Schluß zeigt, daß sie die analytische Projektion ist. Es sei bemerkt, daß man für $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ den Beweis in [Ho p.154] wörtlich vom skalaren auf den vektorwertigen Fall übertragen könnte (s.v.a. [Ho p.155 oben]), da man es mit Bochner-integrierbaren Randfunktionen zu tun hat, für die bekanntlich [HP p.96] Rotation im Argument stetig in der L^P -Norm ist. Der Fall Gelfand-integrierbarer Randfunktionen ist technisch etwas schwieriger.

Ich zeige nun $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ und $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ simultan:

Sowohl 2° als auch 2° implizieren die

Voraussetzung: $\exists S: \mathfrak{h}^P(Y) \rightarrow \mathfrak{h}^P(Y)$ linear und beschränkt mit $S|_{\mathfrak{h}^P(Y)} = \text{id}_{\mathfrak{h}^P(Y)}$.

Behauptung: Die analytische Projektion ist auf den trigonometrischen Polynomen beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_p$ ($\Rightarrow 1^\circ$ wegen (5.1) 2°).

Der Beweis spielt sich auf T ab, d.h. $\mathfrak{h}^P(Y) = L^P(Y)$,

$\mathfrak{h}^P(Y) = L_a^P(Y)$, $\mathfrak{h}^P(Y) = L_{Y,a}^P(X', X)$ ($Y \subset X'$).

Ich brauche das folgende

Lemma: Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $F_m: L^P(X', X) \rightarrow X'$, $f \mapsto \hat{f}(m)$.

Sei $\varphi: T \rightarrow L^P(X', X) = L^Q(X)$ skalar integrierbar $\Rightarrow$

$F_m \circ \varphi$ skalar integrierbar und $F_m \left[\int_T \varphi d\lambda \right] = (G) \int_T F_m \circ \varphi d\lambda$.

Beweis: $F_m \circ \varphi: T \rightarrow X'$ skalar integrierbar:

Sei $x \in X$. $\langle x, F_m[\varphi(\theta)] \rangle = \langle x, (G) \int e^{-imt} \varphi(\theta)(t) \frac{dt}{2\pi} \rangle$

$= \int \langle \underbrace{x e^{-imt}}_{=:g(t)}, \varphi(\theta)(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} = \langle g, \varphi(\theta) \rangle$ ist bzgl. θ integrierbar,
 $=:g(t), g \in L^Q(X)$

da $g \in L^Q(X)$ und $\varphi: T \rightarrow L^P(X', X) = L^Q(X)'$ skalar integrierbar war.

Behauptete Gleichung: Es ist $(G) \int_T F_m \circ \varphi d\lambda \in X'$ so definiert:

Für $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} \langle x, (G) \int F_m[\varphi(\theta)] \frac{d\theta}{2\pi} \rangle &= \int \langle x, F_m[\varphi(\theta)] \rangle \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\stackrel{\text{oben}}{=} \iint \langle e^{-imt}, \varphi(\theta)(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} . \end{aligned}$$

Andererseits: Sei $\phi := (G) \int_T \varphi d\lambda \in L^P(X', X) = L^Q(X)'$ und $x \in X$
 $\Rightarrow \langle x, F_m[(G) \int \varphi d\lambda] \rangle = \langle x, F_m[\phi] \rangle$

$$= \langle x, (G) \int e^{-imt} \phi(t) \frac{dt}{2\pi} \rangle = \int \underbrace{\langle x e^{-imt}, \phi(t) \rangle}_{=: g(t), g \in L^Q(X)} \frac{dt}{2\pi}$$

$$= \langle g, \phi \rangle = \langle g, (G) \int \varphi(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \rangle \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } (G) \int \varphi d\lambda}}{=} \int \langle g, \varphi(\theta) \rangle \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \iint \langle g(t), \varphi(\theta)(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = \iint \langle x e^{-imt}, \varphi(\theta)(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad \text{q.e.d.}$$

(A good exercise in unravelling definitions).

Beweis der Behauptung p.102:

Für $\theta \in T$, $f \in L^P_Y(X', X)$ sei $R_\theta f(t) := f(\theta+t)$.

Es ist klar, daß $R_\theta f \in L^P_Y(X', X)$, $\|R_\theta f\|_p = \|f\|_p$,

$f \in L^P(Y) \Rightarrow R_\theta f \in L^P(Y)$, $f \in L^P_{Y,a}(X', X) \Rightarrow R_\theta f \in L^P_{Y,a}(X', X)$.

Nach Voraussetzung (auf T übertragen)

$\exists S: L^P(Y) \rightarrow L^P_{Y,a}(X', X)$ beschränkt linear mit $S|_{L^P_a(Y)} = \text{id}_{L^P_a(Y)}$.

Sei nun $f \in L^P(Y)$ ein trigonometrisches Polynom.

Behauptung $\varphi : T \rightarrow L^P(X', X) = L^Q(X)'$,

$\theta \mapsto R_{-\theta} S R_{\theta} f$ ist skalar integrierbar.

Beweis: Es genügt, dies für ein Monom f zu zeigen:

$f(t) = a e^{int}$, $a \in Y$, $n \in \mathbb{Z}$ fest.

θ fest: $R_{\theta} f(t) = a e^{in(\theta+t)} = e^{in\theta} a e^{int} = e^{in\theta} f(t)$,

d.h. $R_{\theta} f = e^{in\theta} f \Rightarrow$

$\varphi(\theta) = R_{-\theta} S R_{\theta} f = e^{in\theta} R_{-\theta} S f$.

Sei $g := S f \in L^P(X', X)$. Zu zeigen:

$\theta \mapsto \langle h, \varphi(\theta) \rangle$ ist integrierbar $\forall h \in L^Q(X)$.

Nun ist $\langle h, \varphi(\theta) \rangle = \int \langle h(t), \varphi(\theta)(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} =$

$= \int \langle h(t), e^{in\theta} (R_{-\theta} g)(t) \rangle \frac{dt}{2\pi}$

$= e^{in\theta} \int \langle h(t), g(t-\theta) \rangle \frac{dt}{2\pi}$

$= e^{in\theta} \int \langle h(t+\theta), g(t) \rangle \frac{dt}{2\pi}$

$= e^{in\theta} \int \langle R_{\theta} h(t), g(t) \rangle \frac{dt}{2\pi} = e^{in\theta} \langle R_{\theta} h, g \rangle$,

wobei R_{θ} jetzt auch $L^Q(X) \rightarrow L^Q(X)$ operiert.

Das ist die entscheidende Reduktion auf den Bochner-integrier-

baren Fall: Für $h \in L^Q(X)$ ist $T \mapsto L^Q(X)$, $\theta \mapsto R_{\theta} h$ sogar stetig

[HP p.96] $\Rightarrow \theta \mapsto \langle h, \varphi(\theta) \rangle = e^{in\theta} \langle R_{\theta} h, g \rangle$ ist sogar stetig,

womit Behauptung 1 gezeigt ist.

Für jedes trigonometrische Polynom $f \in L^P(Y)$ existiert also

$\tilde{S} f := (G) \int R_{-\theta} S R_{\theta} f \frac{d\theta}{2\pi} \in L^P(X', X)$.

Behauptung 2: $\tilde{S} : \{f \in L^P(Y) : f \text{ trig. Poly.}\} \longrightarrow L^P(X', X)$

ist (linear und) beschränkt:

Beweis: $L^P(X', X) = L^Q(X)'$ $\Rightarrow$ für trigonometrisches Polynom f :

$$\|\tilde{S}f\|_p = \sup_{\substack{h \in L^q(X) \\ \|h\|_q \leq 1}} |\langle h, \tilde{S}f \rangle| = \sup_{\substack{h \in L^q(X) \\ \|h\|_q \leq 1}} |\int \langle h, R_{-\theta} S R_{\theta} f \rangle \frac{d\theta}{2\pi}|$$

$$\leq \sup_{\substack{h \in L^q(X) \\ \|h\|_q \leq 1}} \int |\langle h, R_{-\theta} S R_{\theta} f \rangle| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \|S\| \|f\|_p.$$

$$\downarrow$$

$$(0.5)^5 \leq \|h\|_q \|R_{-\theta} S R_{\theta} f\|_p \leq \|S\| \|f\|_p$$

Behauptung 3: $\tilde{S}$ ist die analytische Projektion.

Beweis: Es genügt, dies für Monome f zu zeigen:

$f(t) := y e^{int}$, $y \in Y$, $n \in \mathbb{Z}$ fest.

1. Fall: $n \geq 0 \Rightarrow f \in L^p_a(Y) \Rightarrow R_{\theta} f \in L^p_a(Y)$

$$\Rightarrow S R_{\theta} f = R_{\theta} f \Rightarrow R_{-\theta} S R_{\theta} f = R_{-\theta} R_{\theta} f = f$$

$$\Rightarrow \tilde{S}f = f = f^a.$$

2. Fall: $n < 0$, dann ist zu zeigen: $\tilde{S}f = 0$ (in $L^p(X', X)$).

Dazu zeige ich, daß alle Fourierkoeffizienten von $\tilde{S}f$ verschwinden.

Sei $m \in \mathbb{Z}$ fest und $F_m : L^p(X', X) \rightarrow X'$, $f \mapsto \hat{f}(m)$ wie im Lemma.

Nach diesem ist $F_m \circ \varphi$ skalar integrierbar und

$$F_m[\tilde{S}f] = F_m[(G) \int \varphi(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}] = (G) \int F_m[\varphi(\theta)] \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= (G) \int F_m[R_{-\theta} S R_{\theta} f] \frac{d\theta}{2\pi}$$

Für $f(t) = y e^{int}$ ist, wie schon berechnet,

$$R_{-\theta} S R_{\theta} f = e^{in\theta} R_{-\theta} S f \Rightarrow F_m[R_{-\theta} S R_{\theta} f] = e^{in\theta} F_m[R_{-\theta} S f] =$$

$$= e^{in\theta} (G) \int e^{-imt} (R_{-\theta} S f)(t) \frac{dt}{2\pi}$$

$$= e^{in\theta} (G) \int e^{-imt} (S f)(t - \theta) \frac{dt}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{in\theta} (G) \int e^{-im(t+\theta)} (Sf)(t) \frac{dt}{2\pi} \\
 &= e^{i(n-m)\theta} (G) \int e^{-imt} (Sf)(t) \frac{dt}{2\pi} \\
 &= e^{i(n-m)\theta} \widehat{Sf}(m) = 0 \text{ falls } m < 0,
 \end{aligned}$$

da $Sf \in L_{Y,a}^p(X', X)$, also erst recht $F_m[\tilde{S}f] = 0$.

Falls $m \geq 0$, ist $F_m[\tilde{S}f] = (G) \int e^{i(n-m)\theta} \underbrace{\widehat{Sf}(m)}_{\in Y \subset X'} \frac{d\theta}{2\pi}$

$$= \widehat{Sf}(m) \int e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \text{ da } n < 0 \leq m, \text{ q.e.d.}$$

Die folgenden (wegen des skalaren Falls trivialen) Aussagen stammen für $H^1(Y)$, $H^\infty(Y)$ von Bukhvalov [15 thm.3.9]:

Bemerkung: Sei $0 \neq Y \subset X'$.

1° $H^1(Y)$ ist in $L^1(Y) = h^1(Y)$ nicht komplementiert,
 $H^1(Y)$ ist in $L_Y^1(X', X)$ (also auch in $h^1(Y)$) nicht komplementiert.

2° $H^\infty(Y)$ ist in $L^\infty(Y) = h^\infty(Y)$ nicht komplementiert,
 $H^\infty(Y)$ ist in $L_Y^\infty(X', X) = h^\infty(Y)$ nicht komplementiert.

Beweis: Die Aussagen sind für $Y = \mathbb{C}$ bekannt [Ho p.154f.].

Wähle $y \in Y$, $x \in X$ mit $\langle x, y \rangle = 1$.

Wäre $S: L^1(Y) \rightarrow H^1(Y)$ Projektion, so wäre auch $S_{\mathbb{C}}: L^1 \rightarrow H^1$,

$f \mapsto \langle x, S[fy] \rangle$ Projektion, Widerspruch. Die anderen Behauptungen gehen analog.

Der folgende Satz ist im wesentlichen eine Formalität:

(5.4) Satz: Sei $1 < p < \infty$ und für $N \in \mathbb{N}_0$ $S_N: L^p(X) \rightarrow L^p(X)$,

$S_N f := \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{in\theta}$ der N .(symmetrische) Partialsummenoperator.

Es sind äquivalent:

1° X hat die analytische Projektion (p)

2° $\sup_N \|S_N\|_p < \infty$

3° $\forall f \in L^p(X) : S_N f \rightarrow f \text{ in } L^p(X).$

Beweis: Der Beweis folgt [G p.108f.].

2° $\Leftrightarrow$ 3°: $S_N f \rightarrow f$ ist trivial für trigonometrische Polynome f .

Diese liegen dicht in $L^p(X)$ (Lemma (3.2)). Aus 2° folgt die Behauptung.

3° $\Rightarrow$ 2°: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

1° $\Leftrightarrow$ 2°: Es sei A die auf den trigonometrischen Polynomen definierte analytische Projektion. Die behauptete Äquivalenz folgt aus den Ungleichungen $\|A\|_p \leq \sup_N \|S_N\|_p \leq 2\|A\|_p$ (auf den trigonometrischen Polynomen), die ich nun zeige:

1. Ungleichung: Sei $f = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta}$. Für große m berechnet man nacheinander

$$e^{-im\theta} f = \sum_{n=-N}^N a_n e^{i(n-m)\theta} = \sum_{n=-N-m}^{N-m} a_{n+m} e^{in\theta} \Rightarrow$$

$$e^{im\theta} S_m [e^{-im\theta} f] = \sum_{n=0}^N a_n e^{in\theta} = Af \quad \text{für } m \text{ groß} \Rightarrow$$

$$\|Af\|_p \leq \|S_m\|_p \|f\|_p \quad \text{für } m \text{ groß} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

2. Ungleichung: Für $N \in \mathbb{Z}$ sei $A_N \varphi := e^{iN\theta} A[e^{-iN\theta} \varphi]$

(für trigonometrische Polynome φ).

Sei nun $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ ein trigonometrisches Polynom. Man berechnet nacheinander

$$e^{-iN\theta} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n-N)\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+N} e^{in\theta} \Rightarrow$$

$$A[e^{-iN\theta} f] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} e^{in\theta} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e^{i(n-N)\theta} \Rightarrow$$

$$A_N f = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e^{in\theta} \Rightarrow \text{für } N \in \mathbb{N}_0 :$$

$$S_N f = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta} = \sum_{-N}^{\infty} - \sum_{N+1}^{\infty} = A_{-N} f - A_{N+1} f \Rightarrow$$

$$S_N = A_{-N} - A_{N+1}. \text{ Da offenbar } \|A_N\|_p = \|A\|_p \quad \forall N \in \mathbb{Z},$$

folgt die Behauptung.

Corollar [15 thm.3.1] Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

X hat die analytische Projektion (p) $\Leftrightarrow$

X' hat die analytische Projektion (q).

Beweis: Da die analytische Projektion sich offenbar auf Unterbanachräume vererbt, genügt es, " $\Rightarrow$ " zu zeigen. Die Behauptung folgt (mit dem letzten Satz) daraus, daß S_N in folgendem Sinn "selbstadjungiert" ist:

Sei $S'_N : L^p(X)' \rightarrow L^p(X)'$ der duale Operator.

Behauptung: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^p(X)' & \xrightarrow{S'_N} & L^p(X)' \\ \cup & & \cup \\ L^q(X') & \xrightarrow{S_N} & L^q(X') \end{array}$$

kommutiert (dann ist man fertig wegen $\|S'\| = \|S\|$

für jeden Operator S zwischen Banachräumen).

Beweis: Sei $g \in L^q(X')$ und $G \in L^p(X)$ ' das zugehörige Funktional, d.h. $Gf = \langle f, g \rangle := \int \langle f, g \rangle d\lambda \quad \forall f \in L^p(X)$.

Zu zeigen: $S_N' G$ wird durch $S_N g$ dargestellt, d.h.

$$(S_N' G) f = \int \langle f, S_N g \rangle d\lambda \quad \forall f \in L^p(X):$$

$$(S_N' G) f = GS_N f = \int \langle S_N f, g \rangle d\lambda = \sum_{n=-N}^N \int \langle \hat{f}(n) e^{in\theta}, g(e^{i\theta}) \rangle \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \sum_{n=-N}^N \langle \hat{f}(n), \hat{g}(-n) \rangle ;$$

$$\int \langle f, S_N g \rangle d\lambda = \sum_{n=-N}^N \int \langle f(e^{i\theta}), \hat{g}(n) e^{in\theta} \rangle \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \sum_{n=-N}^N \langle \hat{f}(-n), \hat{g}(n) \rangle, \text{ q.e.d.}$$

(5.5) Harmonische Konjugierte

Sei $u: D \rightarrow X$ harmonisch, $u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$.

Die harmonische Konjugierte von u ist die harmonische Funktion

$$v: D \rightarrow X, \quad v(re^{i\theta}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} n a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

wobei $\operatorname{sgn} 0 := 0$. (Ist u reellwertig, so ist v diejenige reelle harmonische Funktion mit $v(0) = 0$ und $u+iv$ holomorph.)

$$\text{Sei } Q_r(t) := \frac{2r \sin t}{1-2r \cos t + r^2} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} n r^{|n|} e^{int}$$

der konjugierte Poissonkern. Für $\varphi \in L^1(X)$ sei

$$Q[\varphi]: D \rightarrow X, \quad Q[\varphi](re^{i\theta}) := \int_0^{2\pi} Q_r(\theta-t) \varphi(e^{it}) \frac{dt}{2\pi}$$

$$= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} n \hat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$$

das konjugierte Poisson-Integral.

War $u = P[\varphi]$, so ist die harmonische Konjugierte $v = Q[\varphi]$.

Weiter gilt $P_{\mathbb{R}} + iQ_{\mathbb{R}} = 2C_{\mathbb{R}} - 1$. Damit ist die folgende (triviale)

Bemerkung klar (wegen (5.1)2°c)):

Bemerkung: Es sind äquivalent:

1° X hat die analytische Projektion (p)

2° $Q: L^p(X) \rightarrow \mathbb{H}^p(X)$ wohldefiniert und stetig.

$$\varphi \mapsto Q[\varphi]$$

3° $u \mapsto v(s.o.)$ ist beschränkter Operator $\mathbb{H}^p(X) \rightarrow \mathbb{H}^p(X)$.

(5.6) Konjugation, Hilberttransformation

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, daß die Existenz der analytischen Projektion (p) äquivalent ist zur Beschränktheit der Konjugation $f \mapsto \tilde{f}$, $L^p(X) \rightarrow L^p(X)$ sowie der Hilberttransformationen $\tilde{H}: L^p(X) \rightarrow L^p(X)$ (periodischer Fall) und $H: L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$ (nichtperiodischer Fall). Diese Aussagen gelten als allgemein bekannt ([15 p.1057], [17 la.3&4], [37]), sind aber m.W. nirgendwo (zitierbar) aufgeschrieben.

Sei $1 < p < \infty$ fest.

Definition: Sei X Banachraum, $\varepsilon > 0$, $1 < p < \infty$.

1° Für $f \in L^p(X)$, $\theta \in T$ sei

$$\tilde{f}_{\varepsilon}(\theta) := \int_{\pi > |t-\theta| > \varepsilon} \cot \frac{\theta-t}{2} f(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

2° Für $f \in L^p(X)$, $\theta \in T$ sei

$$\tilde{H}_{\varepsilon} f(\theta) := \int_{\pi > |t-\theta| > \varepsilon} \frac{f(t)}{\theta-t} \frac{dt}{\pi}.$$

3° Für $f \in L^P(\mathbb{R}, X)$, $s \in \mathbb{R}$ sei

$$H_\varepsilon f(s) := \int_{\infty > |t-s| > \varepsilon} \frac{f(t)}{s-t} \frac{dt}{\pi}.$$

Man sieht leicht, daß die Integrale existieren und die Funktionen $\tilde{f}_\varepsilon$, $\tilde{H}_\varepsilon f : T \rightarrow X$, $H_\varepsilon f : \mathbb{R} \rightarrow X$ beschränkt und meßbar sind (also sind $\tilde{f}_\varepsilon$, $\tilde{H}_\varepsilon f \in L^P(X)$).

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1° $Q : L^P(X) \rightarrow \mathbb{H}^P(X)$, $f \mapsto Q[f]$ beschränkt (d.h. X hat die analytische Projektion (p) nach (5.4))

2° $\forall f \in L^P(X) \exists \tilde{f}(\theta) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_\varepsilon(\theta) \quad f.\ddot{u}. (\theta \in T),$
 $\tilde{f} \in L^P(X)$ und $f \mapsto \tilde{f}, L^P(X) \rightarrow L^P(X)$ beschränkt

2° $\forall f \in L^P(X) \exists \tilde{f} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_\varepsilon$ in $L^P(X)$ und
 $f \mapsto \tilde{f}, L^P(X) \rightarrow L^P(X)$ beschränkt

3° $\forall f \in L^P(X) \exists \tilde{H}f(\theta) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_\varepsilon f(\theta) \quad f.\ddot{u}. (\theta \in T),$

$\tilde{H}f \in L^P(X)$ und $\tilde{H} : L^P(X) \rightarrow L^P(X)$ beschränkt

3° $\forall f \in L^P(X) \exists \tilde{H}f := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_\varepsilon f$ in $L^P(X)$ und

$\tilde{H} : L^P(X) \rightarrow L^P(X)$ beschränkt

4° $\forall f \in L^P(\mathbb{R}, X) \exists Hf(s) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f(s) \quad f.\ddot{u}. (s \in \mathbb{R}),$

$Hf \in L^P(\mathbb{R}, X)$ und $H : L^P(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^P(\mathbb{R}, X)$ beschränkt

4° $\forall f \in L^P(\mathbb{R}, X) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{ist } H_\varepsilon f \in L^P(\mathbb{R}, X),$

$\exists Hf := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f \quad \text{in } L^P(\mathbb{R}, X) \quad \text{und}$

$H : L^P(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^P(\mathbb{R}, X) \quad \text{beschränkt}$

4' : $\forall f \in L^P(\mathbb{R}, X) \quad \text{ist } H_1 f \in L^P(\mathbb{R}, X) \quad \text{und}$

$H_1 : L^P(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^P(\mathbb{R}, X) \quad \text{beschränkt.}$

Vor dem Beweis einige

Anmerkungen:

a) Im Fall der Existenz stimmen die jeweils 2 Definitionen von $\tilde{f}$ (konjugierte Funktion),

$\tilde{H}f$ ("periodische" Hilberttransformierte),

Hf (nichtperiodische Hilberttransformierte)

überein (f.ü., d.h. im L^P -Raum). (Das ist klar.)

b) Es ist $\cot \frac{t}{2} = Q_1(t) (t \neq 0)$. Den Ausdruck für

$\tilde{f}(\theta) = (\text{Hauptwert von}) \int_T \cot \frac{\theta-t}{2} f(t) \frac{dt}{2\pi}$

erhält man also formal, indem man in

$Q[f](re^{i\theta}) = \int_T Q_r(\theta-t) f(t) \frac{dt}{2\pi}$

$r = 1$ setzt. Wie der Beweis zeigen wird, ist (im Fall der

Existenz) tatsächlich $\tilde{f}(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} Q[f](re^{i\theta}) \quad \text{f.ü.}(\theta).$

(m.a.W.: $\tilde{P}[f] = Q[f]$).

(5.7) Beweis von Satz (5.6), 1. Schritt

Ich zeige zunächst die Äquivalenz von 1°, 2°, 2°.

Der Beweis folgt teilweise [G p.103f.].

Dort wird zunächst berechnet:

$$a) \lim_{r \rightarrow 1} Q_r(t) = Q_1(t) = \cot \frac{t}{2} \quad (t \neq 0)$$

(wie schon angemerkt).

$$b) |Q_1(t) - Q_r(t)| \leq \frac{2}{1+r} P_r(t) \quad \text{für } \varepsilon = 1-r < |t| < \pi$$

$$c) |Q_r(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für } |t| \leq \varepsilon = 1-r.$$

Sei nun $f \in L^p(X)$, $v := Q[f]$, $\varepsilon = 1-r > 0$.

Dann folgt $\|v(re^{i\theta}) - \tilde{f}_\varepsilon(\theta)\| =$

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(t) f(\theta-t) \frac{dt}{2\pi} - \int_{|t|>\varepsilon} \cot \frac{t}{2} f(\theta-t) \frac{dt}{2\pi} \right\|$$

$$\underset{\text{ung.}}{Q_r, Q_1} \left\| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Q_r(t) (f(\theta-t) - f(\theta)) \frac{dt}{2\pi} + \right.$$

$$\left. + \int_{|t|>\varepsilon} (Q_r(t) - Q_1(t)) (f(\theta-t) - f(\theta)) \frac{dt}{2\pi} \right\|$$

b), c)

$$\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \|f(\theta-t) - f(\theta)\| dt$$

$$+ \frac{2}{1+r} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) \|f(\theta-t) - f(\theta)\| \frac{dt}{2\pi}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \|f(t) - f(\theta)\| dt + \frac{2}{1+r} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \|f(t) - f(\theta)\| \frac{dt}{2\pi}$$

$$=: A_\varepsilon(\theta) + 2B_r(\theta).$$

Es gilt $A_\epsilon(\theta) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ f.ü. (θ) [DU II.2.9].

Es gilt auch $A_\epsilon \rightarrow 0$ in L^p : Dazu genügt es, eine L^p -Majorante für die A_ϵ anzugeben:

$$A_\epsilon(\theta) \leq \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} \|f(t)\| dt + \underbrace{\frac{1}{\pi} \|f(\theta)\|}_{\text{in } L^p \text{ n.Vor.}}$$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} \|f(t)\| dt = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \|f(\theta+t)\| dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{-\epsilon}^0 \|f(\theta+t)\| dt + \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_0^{\epsilon} \|f(\theta+t)\| dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2 \sup_{0 < |t| \leq \pi} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(\theta+t)\| dt \in L^p(d\theta) \text{ nach einer Form des}$$

Hardy-Littlewood Maximaltheorems [Du thm.B.3].

Die F.ü.-Konvergenz der B_r gegen 0 ($r \rightarrow 1$) formuliere ich als

Lemma: $f \in L^1(X) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta-t) \|f(t)-f(\theta)\| \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$

f.ü. (θ) .

(Aus dem Lemma folgt nochmals die radiale Version von Corollar (1.9)).

Beweis: Ich zeige die behauptete Konvergenz für alle Lebesgue-Punkte von f , d.h. für alle θ_0 mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\theta_0-h}^{\theta_0+h} \|f(t)-f(\theta_0)\| dt = 0.$$

(Dies sind fast alle Punkte [DU II.2.9].)

Sei dazu g die L^1 -Funktion $g(t) = \|f(t) - f(\theta_0)\|$,
dann existiert in θ_0 die symmetrische Ableitung des unbestimmten Integrals von g und ist $= 0$.

Nach [Du thm.1.2] folgt $\lim_{r \rightarrow 1} P[g](re^{i\theta_0}) = 0$,

und das ist die Behauptung.

Im Beweis des Satzes zeige ich als nächstes, daß auch

$B_r \rightarrow 0$ in L^P gilt: Wieder genügt es, eine L^P -Majorante anzugeben:

$$\begin{aligned} B_r(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \|f(t) - f(\theta)\| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq P[\|f\|](re^{i\theta}) + \|f(\theta)\| \\ &\leq M_{\|f\|}(\theta) + \|f(\theta)\| \in L^P(d\theta/2\pi), \end{aligned}$$

wobei $M_{\|f\|}$ die radiale Maximalfunktion zu $\|f(\cdot)\|$ ist, die in L^P liegt [Du thm.1.8].

Damit ist gezeigt: $v_r - \tilde{f}_e \rightarrow 0$ f.ü. und in $L^P(X)$ ($\epsilon = 1-r \rightarrow 0$).

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$, 2° kann man daran ablesen (mit Satz 1.11), inklusive
(5.5) Anmerkung b).

Gilt 2° oder 2^* , so folgt, daß $f \mapsto Q[f]$ auf den trigonometrischen Polynomen beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist, was mit leichten Schlüssen (vgl. (5.1) 2°) äquivalent zu 1° ist. Q.e.d.

(5.8) Beweis von Satz (5.6), 2.Schritt

$2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ und $2^* \Leftrightarrow 3^*$ sind trivial, da es sich bei $\cot \frac{t}{2}$ und $\frac{2}{t}$

um die "gleiche" Singularität in 0 handelt, d.h.

$\cot \frac{t}{2} \sim \frac{2}{t}$ ($t \rightarrow 0$). Insbesondere ist $\varphi(t) := \frac{2}{t} - \cot \frac{t}{2}$ stetig

(ergänzzbar) in 0 und daher beschränkt auf $[-\pi, \pi]$, etwa durch

$$\frac{2}{\pi} [G \text{ p.105}]. \text{ An der Darstellung } \tilde{H}_\varepsilon f(\theta) - \tilde{f}_\varepsilon(\theta) =$$

$$= \int_{\pi > |\theta-t| > \varepsilon}^{\pi} \varphi(\theta-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta-t) f(t) \frac{dt}{2\pi}$$

für alle θ und in $L^p(\frac{d\theta}{2\pi})$ kann man alles Gewünschte ablesen.

Ich zeige nun $3^\circ \& 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \& 4^\circ$. Der Beweis folgt teilweise

[Z II p.256]. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ und

$$f_n : T = (-\pi, \pi) \longrightarrow X, \quad f_n(\theta) := f(n\theta).$$

$$\text{Dann ist } \|f_n\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} \|f(n\theta)\|_p^p \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \|f(t)\|_p^p dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi n} \|f\|_p^p.$$

Sei $g_n(s) := \tilde{H}f_n(\frac{s}{n})$ für $|s| < n\pi$, trivial durch 0 fortgesetzt.

Nach 3° existiert g_n f.ü.(s) und

$$\|g_n\|_p^p = \int_{-n\pi}^{n\pi} \|\tilde{H}f_n(\frac{s}{n})\|_p^p ds = n \int_{-\pi}^{\pi} \|\tilde{H}f_n(\theta)\|_p^p d\theta$$

$$= 2\pi n \|\tilde{H}f_n\|_p^p \leq 2\pi n \|\tilde{H}\|_p^p \|f_n\|_p^p \leq \|\tilde{H}\|_p^p \|f\|_p^p.$$

Setze $g_{n,\varepsilon}(s) := \tilde{H}_\varepsilon f_n(\frac{s}{n})$ für $|s| < n\pi$, trivial durch 0 fortge-

setzt, so daß also $g_n(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{n,\varepsilon}(s)$ f.ü.(s) (n fest).

Nach Definition von $\tilde{H}_\varepsilon$ ist für $|s| < n\pi$:

$$\begin{aligned}
 g_{n,\varepsilon}(s) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\varepsilon}{n} < |t - \frac{s}{n}| < \pi} \frac{f(nt)}{\frac{s}{n} - t} dt = \frac{1}{n\pi} \int_{\frac{\varepsilon}{n} < |\frac{t}{n} - \frac{s}{n}| < \pi} \frac{f(t)}{\frac{s}{n} - \frac{t}{n}} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |t-s| < n\pi} \frac{f(t)}{s-t} dt .
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für $|s| < n\pi$:

$$(*) \quad H_{\varepsilon} f(s) - g_{n,\varepsilon}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{|t-s| \geq n\pi} \frac{f(t)}{s-t} dt .$$

Beweis von 4°: Für festes s geht die rechte Seite von $(*)$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$ (da $t \mapsto \frac{f(t)}{s-t}$ integrierbar ist etwa über $\{|t-s| \geq 1\}$). Also gilt für festes s :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{\varepsilon} f(s) - g_{n,\varepsilon}(s)) = 0 \text{ gleichmäßig in } \varepsilon .$$

Sei nun $s \in \mathbb{R}$ so daß $g_n(s)$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ (dies sind fast alle $s \in \mathbb{R}$) und $\eta > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|H_{\varepsilon} f(s) - g_{n,\varepsilon}(s)\| \leq \eta \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ und mit } |s| < n\pi .$$

$$g_n(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{n,\varepsilon}(s) \text{ existiert} \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0 : \|g_{n,\varepsilon_1}(s) - g_{n,\varepsilon_2}(s)\| \leq \eta$$

$$\Rightarrow \forall 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0 :$$

$$\|H_{\varepsilon_1} f(s) - H_{\varepsilon_2} f(s)\| \leq \|H_{\varepsilon_1} f(s) - g_{n,\varepsilon_1}(s)\|$$

$$+ \|g_{n,\varepsilon_1}(s) - g_{n,\varepsilon_2}(s)\| + \|H_{\varepsilon_2} f(s) - g_{n,\varepsilon_2}(s)\| \leq 3\eta .$$

Also existiert $Hf(s)$ in X und mit $\varepsilon \rightarrow 0$ in $(*)$ folgt:

$$Hf(s) - g_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ d.h. } Hf(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(s) .$$

Dies für fast alle $s \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (Fatou)

$$\|Hf\|_p^p \leq \frac{\lim}{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_p^p \leq \|\tilde{H}\|_p^p \|f\|_p^p, \text{ q.e.d.}$$

Beweis von 4°: Nach 3° ist $S_p := \sup_{\varepsilon > 0} \|\tilde{H}_\varepsilon\|_p < \infty$.

Eine simple Rechnung (wie die Abschätzung von $\|g_n\|_p^p$ auf S.116) ergibt

$$(a) \quad \|g_{n,\varepsilon}\|_p^p \leq \|H_{\frac{\varepsilon}{n}}\|_p^p \|f\|_p^p \leq S_p^p \|f\|_p^p.$$

Ich schätze nun die rechte Seite von (*) ab:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{|t-s| \geq n\pi} \frac{f(t)}{s-t} dt \right\|_p &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq n\pi} \frac{\|f(s-t)\|_p}{|t|} dt \leq (\text{Hölder; } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|f\|_p \left(\int_{|t| \geq n\pi} \frac{dt}{|t|^q} \right)^{1/q} = a_p \frac{1}{n^{1/p}} \|f\|_p, \end{aligned}$$

wobei $a_p := \frac{2^{1/q}}{\pi^{1+1/p}(q-1)^{1/q}}$. Es folgt

$$(b) \quad \int_{-n\pi}^{n\pi} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{|t-s| \geq \pi} \frac{f(t)}{s-t} dt \right\|_p^p ds \leq 2n\pi a_p^p \frac{1}{n} \|f\|_p^p = 2\pi a_p^p \|f\|_p^p$$

Aus (*), (a) und (b) folgt

$$\left(\int_{-n\pi}^{n\pi} \|H_\varepsilon f(s)\|_p^p ds \right)^{1/p} \leq \|g_{n,\varepsilon}\|_p + \left(\int_{-n\pi}^{n\pi} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{|t-s| \geq n\pi} \frac{f(t)}{s-t} dt \right\|_p^p ds \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad (b) &\leq S_p \|f\|_p + (2\pi)^{1/p} a_p \|f\|_p \\ &= (S_p + (2\pi)^{1/p} a_p) \|f\|_p. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man $H_\epsilon f \in L^p(X)$ und $\|H_\epsilon f\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \forall \epsilon > 0$,

C_p unabhängig von $(f \text{ und } \epsilon)$. Damit ist man vermöge skalarer

Theorie fertig: Gemäß [DS XI.7.11] existiert für alle

$$\varphi \in L^p(\mathbb{R}) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon \varphi \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}) \quad \forall x \in X \quad \text{existiert } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon [\varphi(\cdot)x] \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}, X).$$

Da $\{\varphi(\cdot)x : \varphi \in L^p(\mathbb{R}), x \in X\}$ in $L^p(\mathbb{R}, X)$ total ist, folgt die

Existenz von $Hf = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon f$ in $L^p(\mathbb{R}, X) \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ und

die Beschränktheit von $H : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$. Q.e.d.

Anmerkung: Man braucht den skalaren Satz [DS XI.7.11] nicht für alle $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, sondern nur für $\varphi = \chi_{(a,b)}$ ($-\infty < a < b < \infty$), und dafür ist er eine elementare Rechnung. Denn auch $\{\chi_{(a,b)}(\cdot)x : a < b, x \in X\}$ ist in $L^p(\mathbb{R}, X)$ total.

Als nächstes zeige ich $4' \Rightarrow 4^*$ ($4^* \Rightarrow 4'$ ist ja trivial).

Sei also $H_1 : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$ beschränkt.

Setze $T_\epsilon : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$, $T_\epsilon f(t) := f(\epsilon t)$ (vgl. [DS p.1065]).

Dann ist $\|T_\epsilon\|_p \leq \epsilon^{-1/p}$ und $H_\epsilon = T_{\frac{1}{\epsilon}} H_1 T_\epsilon$, also

$H_\epsilon : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$ und $\|H_\epsilon\|_p \leq \|H_1\|_p \quad \forall \epsilon > 0$. Man ist also

wieder in der Situation von oben, so daß 4^* folgt.

Abschließend zeige ich $4^* \Rightarrow 3^*$ und $4^* \Rightarrow 3^*$.

Sei $f \in L^p(X) := L^p(T, X) = L^p((-\pi, \pi), X)$. Setze f 2π -periodisch fort auf $(-2\pi, 2\pi)$ zu F , und setze $F := 0$ außerhalb $(-2\pi, 2\pi)$.

$$\text{Dann ist } F \in L^p(\mathbb{R}, X) \text{ und } \|F\|_p^p = \int_{-2\pi}^{2\pi} \|F(t)\|_p^p dt =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \|f(t)\|_p^p \frac{dt}{2\pi} = 4\pi \|f\|_p^p.$$

Für $\varepsilon > 0$ und $\theta \in (-\pi, \pi)$ gilt:

$$\begin{aligned} H_\varepsilon F(\theta) - \tilde{H}_\varepsilon f(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{\substack{|\theta-t| > \varepsilon \\ \pi > |t-\theta| > \varepsilon}} \frac{F(t)}{\theta-t} dt - \frac{1}{\pi} \int \frac{F(t)}{\theta-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\substack{|\theta-t| > \pi \\ \infty > |t-\theta| > \pi}} \frac{F(t)}{\theta-t} dt = H_\pi F(\theta) . \end{aligned}$$

Daran kann man $4^\circ \Rightarrow 3^\circ$ ablesen. Gelte nun 4° , dann folgt:

$\tilde{H}f(\theta)$ existiert f.ü. ($\theta \in T$) und $\tilde{H}f(\theta) = HF(\theta) - H_\pi F(\theta)$ für fast alle $\theta \in T$.

Für 3° bleibt zu zeigen, daß $\|H_\pi F\|_{p,T} \leq c_p \|f\|_p$:

$$\begin{aligned} \|H_\pi F\|_{p,T}^p &= \int_{-\pi}^{\pi} \|H_\pi F(\theta)\|^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 4^p \left\| \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{F(t)}{\theta-t} dt \right\|^p \chi_{\{|t-\theta| > \pi\}}(t) \frac{dt}{4\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

Jensensche Ungl.
für $\frac{dt}{4\pi}$ auf $(-2\pi, 2\pi)$

$$\leq 4^p \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\|F(t)\|^p}{|t-\theta|^p} \chi_{\{|t-\theta| > \pi\}}(t) \frac{dt}{4\pi} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\text{Fubini} = 4^p \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi_{\{|t-\theta| > \pi\}}(\theta)}{|t-\theta|^p} \frac{d\theta}{2\pi} \|F(t)\|^p \frac{dt}{4\pi}$$

$$\begin{aligned} &\leq 4^p \int_{-2\pi}^{2\pi} \underbrace{\left(\int \frac{1}{|t-\theta|^p} \frac{d\theta}{2\pi} \right)}_{\substack{\infty > |t-\theta| > \pi \\ =: C_p^p \text{ (unabhängig von } (f \text{ und } t))}} \|F(t)\|^p \frac{dt}{4\pi} \\ &=: C_p^p \text{ (unabhängig von } (f \text{ und } t)) \end{aligned}$$

$$= \frac{(4C_p)^p}{4\pi} \|F\|_p^p = (4C_p)^p \|f\|_p^p, \text{ q.e.d.}$$

(5.9) Satz: Hat X die analytische Projektion (p) für ein $p \in (1, \infty)$, so für alle $p \in (1, \infty)$.

Dies ist, in einer äquivalenten Formulierung, [15 cor.3.3].

Der dortige Beweis ist aber m.E. nicht schlüssig, da er

[DS thm.XI.11.15], das von Kernen "integrable over any finite region"* handelt, auf den Kern $\frac{1}{t}$ der Hilberttransformation H

anzuwenden scheint. Nach Satz (5.6) ist es aber (notwendig

und) hinreichend, die abgeschnittene Hilberttransformation H_1 ,

deren Kern $\frac{1}{t} \chi_{\{|t|>1\}}$ obiger Voraussetzung genügt, zu betrach-

ten. Man hat dann aber für diesen Kern die Voraussetzung (17)

in [loc.cit.] direkt nachzuweisen (was für $\frac{1}{t}$ trivial wäre

wegen [DS XI.11.19], $n = q = 1$).

Dem Beweis vorausschicken möchte ich folgende leicht einzusehende

Notiz:

$H_1 : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$ ist beschränkt, falls

$H_1|_{\{f \in L^p(\mathbb{R}, X) : f \text{ ist Treppenfunktion}\}} \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$ beschränkt ist.

Beweis des Satzes: Ich arbeite mit Bedingung 4' von Satz (5.6).

Sei $p \in (1, \infty)$ so daß $H_1 : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, x)$ beschränkt ist.

Ich will [DS XI.11.17] anwenden für $r = p$, $q = 1$,

$r' = p' \in (1, p)$. (Man beachte, daß es in [loc.cit.] $p' > 1$

statt $p' \geq 1$ heißen muß: mehr liefert der Satz von Marcinkiewiz

[DS XI.11.14] nicht, und für $p' = 1$ wird die Aussage falsch,

sonst müßte nach dem nun folgenden Beweis $H_1 : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$

beschränkt sein, was nicht der Fall ist:

* "finite region" = Menge endlichen Maßes

für $s > 2$ ist $H_1 \chi_{(0,1)}(s) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{s}{s-1}$, und das ist nicht integrierbar bei ∞ .)

Dazu ist zu zeigen, daß der Kern $k(t) := \frac{1}{t} \chi_{\{|t|>1\}}$

der Voraussetzung (17) von [DS XI.11.15] genügt.

Ich zeige sie mit $A := 2$, d.h.

Behauptung: $\exists$ Konstante C mit

$$\int_{|\theta| \geq 2} |k(t(\theta-s)) - k(t\theta)| d\theta \leq \frac{C}{t} \quad \forall |s| \leq \frac{1}{2}, \quad t > 0$$

Beweis: Da k ungerade ist, genügt es, $\int_{\theta \geq 2}$ zu behandeln.

Für $\theta \geq 2$, $|s| \leq \frac{1}{2}$, $t > 0$:

$$k(t\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t\theta}, & \theta > \frac{1}{t} \end{cases}, \quad k(t(\theta-s)) = \begin{cases} 0, & \theta \leq \frac{1}{t} + s \\ \frac{1}{t(\theta-s)}, & \theta > \frac{1}{t} + s \end{cases}$$

Also ist für $\theta > M := \max\{2, \frac{1}{t}, \frac{1}{t} + s\}$ der Integrand

gleich $|\frac{1}{t(\theta-s)} - \frac{1}{t\theta}|$. Außerdem ist für alle $\theta \geq 2$ der Integrand $\leq 2 \Rightarrow$

$$\int_{\theta \geq 2} \dots = I_1 + I_2 \quad \text{mit} \quad I_1 \leq \int_2^M 2 d\theta, \quad I_2 = \int_M^\infty |\frac{1}{t(\theta-s)} - \frac{1}{t\theta}| d\theta.$$

ad I_1 : 1.Fall: $M = 2 \Rightarrow I_1 = 0$

$$2.\text{Fall: } M = \frac{1}{t} \Rightarrow I_1 \leq 2M = \frac{2}{t}$$

$$3.\text{Fall: } M = \frac{1}{t} + s \Rightarrow I_1 \leq 2(\frac{1}{t} + s - 2) \leq \frac{2}{t}$$

$$\text{ad } I_2: I_2 \leq \frac{1}{t} \int_2^\infty |\frac{1}{\theta-s} - \frac{1}{\theta}| d\theta = \frac{|s|}{t} \int_2^\infty \frac{d\theta}{(\theta-s)\theta}$$

$$\leq \frac{1}{2t} \int_2^\infty \frac{d\theta}{(\theta - \frac{1}{2})\theta}$$

Daraus folgt die Zwischenbehauptung.

Mit [DS XI.11.17] folgt $H_1 : L^{p'}(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}, X)$ beschränkt
 $\forall p' \in (1, p)$.

Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nach Corollar (5.3) hat X' die analytische Projektion (q) und nach dem eben Bewiesenen auch für alle $q' \in (1, q)$. Wieder nach Corollar (5.3) hat X die analytische Projektion (p') $\forall p' \in (p, \infty)$, q.e.d.

Wegen des Satzes liegt folgende Definition nahe:

X hat die analytische Projektion: $\Leftrightarrow \exists p$ (oder $\forall p$), $1 < p < \infty$:

X hat die analytische Projektion (p) .

Corollar: Sei μ ein (positives) Maß. X habe die analytische Projektion (für ein r). Sei $1 < q < \infty$, dann hat $Y := L^q(\mu, X)$ die analytische Projektion (für alle $p \in (1, \infty)$).

Insbesondere hat $L^q(\mu)$ die analytische Projektion (für alle $p \in (1, \infty)$), $1 < q < \infty$, μ beliebiges Maß.

Dies folgt sofort aus den Sätzen (5.2) und (5.9). Das Corollar (für $X = \mathbb{C}$) ist, für die Hilberttransformation formuliert, in [DS XI.11.20]. Wie Bukhvalov (vgl. S.121) verwenden die Autoren für die Reduktion auf den Fall $p = q$ ihre vorhergehenden Corollare 17 & 19 für den Kern $\frac{1}{t}$, der der Integrabilitätsvoraussetzung ihres Theorems 15 nicht genügt. (Außerdem fehlt die Reduktion auf den σ -finiten Fall, die man für Fubini braucht, vgl. Beweis von Satz (5.2)).

(5.10) Die Charakterisierungen der analytischen Projektion in Satz (5.6) stellen den Anschluß her zu jüngsten Entwicklungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Geometrie der Banachräume.

Burkholder [17 p.271f.] definiert die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedingung "UMD" und die geometrische Eigenschaft " ζ -konvex" und zeigt deren Äquivalenz [17 thm.1].

In [17 la.2] wird bewiesen, daß für einen ζ -konvexen Banachraum die harmonische Konjugation $u \mapsto v$ (vgl. (5.5)) beschränkt ist bzgl. $\|\cdot\|_p$ (auf den harmonischen Polynomen, $1 < p < \infty$) und danach [17 p.282f.] werden im wesentlichen die äquivalenten Charakterisierungen von Satz (5.6) bemerkt.

M.a.W.: UMD-Räume haben die analytische Projektion.

Da $1^{\mathbb{R}}, L^{\mathbb{R}} \in \text{UMD}$ ($1 < r < \infty$) [17 p.271f.], folgt nochmal Corollar (5.9) im Spezialfall $X = \mathbb{C}$, $Y = 1^{\mathbb{R}}$ oder $L^{\mathbb{R}}$.

Bourgain [8 la.2] zeigt die Umkehrung:

Ist $\tilde{H}: L^p(X) \rightarrow L^p(X)$ beschränkt, so folgt $X \in \text{UMD}$.

Da UMD-Räume superreflexiv sind ([49 rem.4], [1 prop.2]), können also höchstens superreflexive Räume die analytische Projektion haben, insbesondere nicht c_0 , l^1 , L^1 .

Insgesamt ist also die Existenz der analytischen Projektion äquivalent zu UMD, also auch zu ζ -Konvexität. Da letztere per definitionem nicht von $p \in (1, \infty)$ abhängt, folgt auch nochmal Satz (5.9). Auch die Satz (5.2) entsprechende Aussage " $X \in \text{UMD}$, $1 < p < \infty \Rightarrow L^p(X) \in \text{UMD}$ " ist bekannt [49 rem.4].

Im folgenden zeige ich an konkreten Beispielen, daß die analytische Projektion für c_0 und L^1 in drastischer Weise scheitert. Ein L^1 -wertiges Beispiel bringe ich in §6, da es dort aus gewissen Gründen besser motiviert ist (6.9). Ich habe auch ein Beispiel mit Werten in B (= Prädual von JT [46]), auf dessen Ausführung ich aus Platzgründen verzichte.

Unter "drastischem Scheitern" verstehe ich z.B., daß die analytische Projektion $h^\infty(X)$ nicht einmal nach $N(X)$ abbildet. Zunächst folgt aus dem folgenden Satz, daß dies immer eintreten muß, wenn X die $aRNP$, aber nicht die RNP besitzt (z.B. für $X = L^1$):

(5.11) Satz: Sei X Banachraum mit $f^a \in N(X) \quad \forall f \in h^\infty(X)$.

Dann gilt: $X aRNP \Rightarrow X RNP$.

Beweis: Ich zeige, daß jedes $u \in h^\infty(X)$ f.ü. radiale Limiten besitzt (dies ist gemäß (1.12) die Behauptung).

Sei also $u \in h^\infty(X)$, o.B.d.A. $u(0) = 0$, also

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \text{ mit } a_n \in X, a_0 = 0. \text{ Nach Voraussetzung}$$

$$\text{ist } u^a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ in } N(X).$$

$$\text{Setze } v(z) := u(\bar{z}) \Rightarrow v \in h^\infty(X), v(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} r^{|n|} e^{in\theta}. \text{ Nach Voraussetzung ist auch}$$

$$v^a(z = re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} r^n e^{in\theta} = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n r^{|n|} e^{-in\theta} = (u - u^a)(\bar{z})$$

in $N(X)$. Da X die aRNP hat, besitzen u^a und v^a f.ü. radiale Limiten $((2.9), (2.10))$, also auch
 $u(z) = u^a(z) + (u - u^a)(z) = u^a(z) + v^a(\bar{z})$.

(5.12) Beispiel (L^1) :

(a) Ein $f \in h^\infty(L^1)$ mit $f^a \notin N(L^1)$ kann man explizit angeben.

Die Diskussion wird auch zeigen:

(b) $u \mapsto u^a$ ist auf den L^1 -wertigen harmonischen Polynomen nicht beschränkt bzgl. $(\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1)$.

(Mit den Identifizierungen von Abschnitt (3.2) lautet

(b): $u \mapsto u^a$ ist kein beschränkter Operator

$C(T, L^1) \rightarrow H^1(L^1)$).

Setze $f: D \rightarrow L^1$, $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n r^{|n|} e^{in\theta}$, wobei $e_n \in L^1$,

$e_n(\omega) := e^{-in\omega}$. Offenbar ist (1.3)^{4°} erfüllt, also f harmonisch.

Für $re^{i\theta} \in D$ fest ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(\omega) r^{|n|} e^{in\theta}$ konvergent $\forall \omega \in T$,

also ist $f(re^{i\omega})(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(\omega) r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\omega)}$

$$= P_r(\theta-\omega) \quad \text{f.ü.}(\omega),$$

weshalb $f \in h^\infty(L^1)$ ist (mit $\|f\|_\infty = 1$).

Zu (a): $f^a(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n r^n e^{in\theta}$. Mit gleicher Argumentation

wie eben ist

$$f^a(re^{i\theta})(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(\omega) r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-\omega)}$$

$$= C_r(\theta-\omega) \quad \text{f.ü.}(\omega) \Rightarrow$$

$$\|f^a(re^{i\theta})\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C_r(\theta-\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C_r(t)| dt$$

$=: \gamma_r$, unabhängig von θ .

Da $\gamma_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-re^{it}|} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty$ (dies ist einfach die Aussage

$\frac{1}{1-z} \notin H^1$), folgt

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \|f^a(re^{i\theta})\|_1 \frac{d\theta}{2\pi} = \ln^+ \gamma_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty, \text{ d.h. } f^a \notin N(L^1).$$

Zu (b): Wäre (b) falsch, so müßte gelten:

Ist $u: D \rightarrow L^1$, $u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ auf $\bar{D}$ gleichmäßig

konvergent, so ist $u^a \in H^1(L^1)$ und $\|u^a\|_1 \leq C \|u\|_{\infty}$ für eine Konstante C . (Denn gleichmäßige Konvergenz auf $\bar{D}$ impliziert Konvergenz in $h^{\infty}(L^1)$.)

Dies angewandt auf die Funktionen

$f_R: D \rightarrow L^1$, $f_R(z) := f(Rz)$ ($R < 1$) liefert

$$\|f_R^a\|_1 \leq C \|f_R\|_{\infty} \leq C \|f\|_{\infty} = C.$$

Analog zur Rechnung zu (a) ist aber $\|f_R^a(re^{i\theta})\|_1 = \gamma_{rR}$,

unabhängig von θ , also $\|f_R^a\|_1 = \lim_{r \rightarrow 1} \gamma_{rR} = \gamma_R \xrightarrow{R \rightarrow 1} \infty$,

Widerspruch.

(5.13) Beispiel(c_0): Es gibt $f \in L^{\infty}(c_0)$ mit

(a) $\lim_{r \rightarrow 1} C[f](re^{i\theta})$ existiert für kein θ in l^{∞} bzgl. $\sigma(l^{\infty}, l^1)$.

Insbesondere $C[f] \notin N(c_0)$ (wegen Satz (2.13)).

(b) Es gibt keine Funktion (!) $F: T \rightarrow l^\infty$, so daß

$$\forall x \in l^1: \langle x, F(\theta) \rangle = \langle f(\cdot), x \rangle^a(\theta) \text{ f.ü.}(\theta).$$

(Bedingung (b) wird in §6 eine Rolle spielen).

Zur Konstruktion realisiere ich c_0 als $c_0(\text{tr})$.

Dabei ist $\text{tr} := \{(m, j) \in \mathbb{N}_0^2 : 0 \leq j \leq 2^m - 1\}$ der unendliche dyadische Baum (vgl. [46]).

$$\text{Für } (m, j) \in \text{tr} \text{ sei } s_{mj} := \frac{j}{2^m} 2\pi, \quad t_{mj} := \frac{j+1}{2^m} 2\pi$$

und $T_{mj} := [s_{mj}, t_{mj}) \subset [0, 2\pi) =: T$ das j -te dyadische Intervall der m -ten Generation.

$\theta \in T$ heißt dyadisch: $\Leftrightarrow \exists (m, j) \in \text{tr} : \theta = s_{mj}$.

Für $\theta \in T$ nicht-dyadisch sei

$B_\theta := \{(m, j) \in \text{tr} : \theta \in T_{mj}\}$ der zu θ gehörige "Zweig" des Baums

(es gilt $\bigcap_{(m, j) \in B_\theta} T_{mj} = \{\theta\}$).

Lemma: Seien $0 \leq s < t < 2\pi$, $z \in D \Rightarrow$

$$\text{Im } C[\chi_{[s, t)}](z) = \frac{-1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^{it-z}}{e^{is-z}} \right|.$$

Dies ist eine elementare Rechnung.

Im folgenden bezeichne ich mit "Im" den komponentenweise genommenen Imaginärteil. Sei $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ eine positive Nullfolge.

Setze $f: T \rightarrow c_0(\text{tr})$, $f(\theta) := (\varepsilon_m \chi_{[0, t_{mj})}(\theta))_{(m, j) \in \text{tr}}$.

f ist beschränkt und meßbar (Satz von Pettis), d.h.

$f \in L^\infty(c_0)$. Nach dem Lemma ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} C[f](re^{i\theta}) &= \left(\frac{-1}{2\pi} \epsilon_m \ln \left| \frac{e^{it_{mj}} - re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right| \right)_{(m,j) \in \operatorname{tr}} \\ &\quad \downarrow r \rightarrow 1 \quad \text{komponentenweise} \\ &\quad \quad \quad \text{(falls } \theta \text{ nicht dyadisch)} \\ (\epsilon_m \operatorname{Im} \chi_{[0, t_{mj})}^a(\theta))_{(m,j)} &= \left(-\frac{1}{2\pi} \epsilon_m \ln \left| \frac{e^{it_{mj}} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \right)_{(m,j) \in \operatorname{tr}} \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen: Bei geeigneter Wahl von (ϵ_m) liegt das letzte Tupel für kein (nichtdyadisches) θ in $l^\infty(\operatorname{tr})$.

(Für dyadisches θ existiert ja der Limes nicht einmal komponentenweise).

Sei also θ nichtdyadisch fest. Da

$(\epsilon_m \ln |1 - e^{i\theta}|)_{(m,j)} \in l^\infty(\operatorname{tr})$, genügt es, den Anteil

$(\epsilon_m \ln |e^{it_{mj}} - e^{i\theta}|)_{(m,j)}$ zu betrachten, oder auch nur:

$$(\epsilon_m \ln |e^{it_{mj}} - e^{i\theta}|)_{(m,j) \in B_\theta}.$$

Nun ist für $(m,j) \in B_\theta$

$$\epsilon_m \ln |e^{it_{mj}} - e^{i\theta}| \leq \epsilon_m \ln |t_{mj} - \theta| \leq \epsilon_m \ln(2^{-m} 2\pi)$$

$$= -m \epsilon_m \ln 2 + \epsilon_m \ln 2\pi \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\infty$$

z.B. für $\epsilon_m := \frac{1}{\sqrt{m}}$, q.e.d.

(5.14) Abschließend formuliere ich das B-wertige Beispiel,

auf dessen Ausführung ich, wie gesagt, verzichte:

Beispiel (B): Es gibt $f \in L_B^\infty(JT', JT)$ mit

(a) $\lim_{r \rightarrow 1} C[f](re^{i\theta})$ existiert für kein θ in JT' bzgl. $\sigma(JT', JT)$.

Insbesondere $C[f] \notin N(B)$ (wegen Satz (2.13); JT ist separabel [46]).

(b) Es gibt keine Funktion $F: T \rightarrow JT'$

so daß $\forall x \in JT: \langle x, F(\theta) \rangle = \langle f(\cdot), x \rangle^a(\theta)$ f.ü. (θ) .

§ 6: Dual von $H^p(X)$

(6.0) Sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es geht in diesem Paragraphen darum, eine Beschreibung des Duals von $H^p(X)$ als Funktionenraum zu erreichen. Weil $H^p(X) \subset L^p(X)$, $L^p(X)' = L^q(X', X)$ und weil der Annulator von $H^p(X)$ in $L^q(X', X)$ gerade $H_0^q(X') = \{f \in H^q(X') : f(0) = 0\} = \{\varphi \in L_a^q(X', X) : \hat{\varphi}(0) = 0\} = \{\varphi \in L^q(X', X) : \hat{\varphi}(n) = 0 \ \forall n \leq 0\}$ ist (dies folgt aus der Dichtigkeit der analytischen Polynome in $H^p(X)$ (3.2)), hat man sofort $H^p(X)' = L^q(X', X) / H_0^q(X')$ (kanonisch isometrisch isomorph).

Man hat stets die kanonische stetige lineare injektive Abbildung $\bar{H}^q(X') \rightarrow L^q(X', X) / H_0^q(X')$, d.i. die Komposition $\bar{H}^q(X') \hookrightarrow L^q(X', X) \rightarrow L^q(X', X) / H_0^q(X')$.

Außerdem wirkt jedes $g \in \bar{H}^q(X') \subset L^q(X', X)$ als stetiges lineares Funktional der Norm $\leq \|g\|_q$ auf $H^p(X)$, d.h. man hat

$\bar{H}^q(X') \ni H^p(X)', \quad g \mapsto \langle \cdot, g \rangle = \int \langle \cdot, g \rangle d\lambda$ stetig linear.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & L^q(X', X) / H_0^q(X') \\ & \nearrow & \parallel \\ \bar{H}^q(X') & & \\ & \searrow & \\ & & H^p(X)' \end{array}$$

kommutiert. Bukhvalov [15 thm.3.1] bemerkte nun folgenden Zusammenhang zur analytischen Projektion:

Satz: $H^p(X)' \cong \bar{H}^q(X')$ unter der kanonischen Abbildung

$\bar{H}^q(X') \rightarrow H^p(X)', \quad g \mapsto \langle \cdot, g \rangle \ni X'$ hat die analytische Projektion (q).

Beweis: Für eine harmonische Funktion

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \quad \text{sei}$$

$$a_f(re^{i\theta}) := \sum_{n=-\infty}^0 a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \bar{z}^n \quad (z = re^{i\theta})$$

die antianalytische Projektion von f . Selbstverständlich gelten alle Aussagen des § 5 über Existenz und Beschränktheit der analytischen Projektion mutatis mutandis für die antianalytische Projektion. Insbesondere (Satz (5.3)): X' hat die analytische Projektion $(q) \Rightarrow L^q(X', X) = h^q(X') \rightarrow \bar{h}^q(X')$, $f \mapsto a_f$, wohldefiniert und beschränkt. Nun:

" $\Rightarrow$ ": Die Voraussetzung ist wegen des kommutativen Diagramms vor dem Satz äquivalent zu: $\bar{h}^q(X') \xrightarrow{I} L^q(X', X) / H_0^q(X')$ Isomorphismus.

Die Komposition $L^q(X', X) \xrightarrow{[\cdot]} L^q(X', X) / H_0^q(X') \xrightarrow{J^{-1}} \bar{h}^q(X')$ ist aber

gerade die antianalytische Projektion:

Sei $f \in L^q(X', X)$ und $g = J^{-1}[f] \Rightarrow Jg = [f]$. Aber $Jg = [g]$, also ist $f = g + (f-g)$ mit $g \in \bar{h}^q(X')$, $f-g \in H_0^q(X')$, so daß $g = a_f$.

" $\Leftarrow$ ": Es genügt zu zeigen, daß

$J: \bar{h}^q(X') \rightarrow L^q(X', X) / H_0^q(X')$ surjektiv ist.

Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^q(X', X) & \xrightarrow{\quad} & \bar{h}^q(X'), \quad f \mapsto a_f \\ & \searrow [\cdot] & \swarrow J \\ & L^q(X', X) / H_0^q(X') & \end{array}$$

(In [15] findet sich konstant folgender Fehler: Statt $\bar{H}^Q(X')$ steht $H^Q(X')$, wobei die duale Paarung

$$\langle f, g \rangle = \int_T \langle f(e^{it})_g(e^{it}) \rangle d\lambda(t) \quad (f \in H^P(X), g \in H^Q(X'))$$

wie oben definiert ist.

Da aber (vgl. 2° im Beweis von Satz (4.2)) für

$$f \in H^P(X), g \in H^Q(X') \quad \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}(0), \hat{g}(0) \rangle \quad \text{ist, wird die}$$

resultierende Abbildung $H^Q(X') \rightarrow H^P(X)'$, $g \mapsto \langle \cdot, g \rangle$

natürlich hochgradig nicht-injektiv: sie bildet ganz $H_0^Q(X')$

auf 0 ab. Selbstverständlich kann man $\bar{H}^Q(X')$ durch $H^Q(X')$

ersetzen, indem man als Skalarprodukt das hilbertraumähnliche

$$\langle f, g \rangle_{\text{neu}} := \int_T \langle f(e^{it}), g(e^{-it}) \rangle d\lambda(t) \quad \text{nimmt} \quad (f \in H^P(X),$$

$$g \in H^Q(X')) .)$$

Es stellt sich die Frage nach dem allgemeinen Fall, insbesondere da ja die Existenz der analytischen Projektion gemäß

(5.10) eine äußerst restriktive Bedingung ist. Ich kann $H^P(X)'$

als Raum $\bar{H}_*^Q(X')$ von antiholomorphen Funktionen auf D be-

schreiben (6.4), wobei $\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle = \lim_{r \rightarrow 1} \int_T \langle f, g_r \rangle d\lambda$

für $f \in H^P(X)$, $g \in \bar{H}_*^Q(X')$, $g_r(e^{it}) = g(re^{it})$ wie stets.

Dabei hängt die Norm von $g \in \bar{H}_*^Q(X')$ aber in so expliziter Weise von der Wirkung von g als Funktional auf $H^P(X)$ ab, daß man

diese Darstellung nicht als wirklich befriedigend bezeichnen

kann. Insbesondere kann ich aus ihr z.B. im konkreten Fall

$X := c_0$ auch keine konkretere Beschreibung von $H^P(c_0)' = \bar{H}_*^Q(1^1)$

ableiten, was aber eventuell in der Natur der Sache liegt

wegen des pathologischen Beispiels (6.9).

Immerhin ordnet sich der Satz von Bukhvalov in natürlicher Weise unter (6.5), und ich kann einige Aussagen über die Lage von $\bar{H}^q(X')$ in $\bar{H}_*^q(X') = H^p(X)'$ ableiten ((6.6), (6.7)).

Abschließend untersuche ich die Frage, ob $g \in \bar{H}_*^q(X')$ in irgendeinem Sinn eine Funktion $g^*: T \rightarrow X'$ induziert (Fernziel wäre natürlich die Elimination des Limes in der Formel für $\langle f, g \rangle$ und Ersetzung durch $\int_T \langle f, g^* \rangle d\lambda$). Dies ist jedoch i.a. auch im wohl schwächstmöglichen Sinn nicht der Fall (6.8) und hängt mit dem in § 5 behandelten "drastischen Scheitern" der analytischen Projektion zusammen.

Da für RNP-Räume X' , $g \in \bar{H}_*^q(X')$, $g_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} g$ in der Norm von $\bar{H}_*^q(X')$ geht (6.7), könnte man in diesem Fall vielleicht Besseres erwarten. Diese Hoffnung wird jedoch durch das $X' = l^1$ -wertige Beispiel (6.9) zerschlagen.

Der Satz von Bukhvalov wird auch in [63] erzielt. Daneben wird in [13],[14] übrigens gezeigt, daß man für die vektorwertigen Bergman-Räume $A^p(X) := \{f: D \rightarrow X \text{ holomorph} : (\iiint_D \|f(z)\|^p dx dy)\}^{1/p} < \infty\}$

eine glatte Dualitätstheorie hat, d.h.

$A^p(X)' \cong A^q(X')$ stets ($1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

(6.1) Bemerkung: Sei $f \in L^p(X) = h^p(X)$, $g \in L^q(X', X) = h^q(X')$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &:= \int \langle f, g \rangle d\lambda = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f_r, g \rangle \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \langle f_r, g_r \rangle . \end{aligned}$$

Beweis: $\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f_r, g \rangle$, da $f_r \rightarrow f$ in $L^p(X)$ (Satz (1.11)).

$\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle$, da $g_r \rightarrow g$ in $L^q(X', X)$, $L^p(X)$

(Bemerkung (1.5)).

Schließlich $|\langle f_r, g_r \rangle - \langle f, g_r \rangle| \leq \|f_r - f\|_p \|g_r\|_q$

$\leq \|f_r - f\|_p \|g\|_q \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$, wieder weil $f_r \rightarrow f$ in $L^p(X)$, q.e.d.

Der Sinn der Bemerkung liegt u.a. darin, die Wirkung

$\langle f, g \rangle$ von $g \in \bar{H}^q(X')$ auf $f \in H^p(X)$ als $\lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f_r, g_r \rangle$

zu schreiben, denn dies wird die Wirkung eines allgemeinen

Funktional $g \in \bar{H}_*^q(X') = H^p(X)'$ auf $f \in H^p(X)$ sein (s.u.).

(6.2) Lemma: 1° $f \in L^p(X) = H^p(X)$, $g: D \rightarrow X'$ harmonisch,

$r, R \in [0, 1) \Rightarrow \langle f, g_{rR} \rangle = \langle f_R, g_R \rangle$

2° Ist zusätzlich $g \in h^q(X') = L^q(X', X)$, so gilt auch

$\langle f, g_R \rangle = \langle f_R, g \rangle$.

Beweis: 1° Zunächst gilt $\hat{f}_R(n) = \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$

(1.2) $\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) R^{|m|} e^{imt} e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = R^{|n|} \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Sei nun $g(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ gemäß (1.3)

$\Rightarrow \langle f, g_r \rangle = \int_0^{2\pi} \langle f(e^{it}), g(re^{it}) \rangle \frac{dt}{2\pi}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \hat{f}(-n), a_n \rangle r^{|n|}$

$$\Rightarrow \langle f, g_{rR} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \hat{f}(-n), a_n \rangle r^{|n|} r^{|n|} \quad \text{und}$$

$$\langle f_R, g_r \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \hat{f}_R(n), a_n \rangle r^{|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle r^{|n|} \hat{f}(n), a_n \rangle r^{|n|},$$

q.e.d.

2° folgt mit $r \rightarrow 1$ aus 1° vermöge Bemerkung (6.1).

(6.3) Definition: Sei $1 < q < \infty$. $\bar{H}_*^q(X') := \{g : D \rightarrow X' \text{ antiholo-}$

$$\text{morph: } \|g\|_q^* := \sup_{0 \leq r < 1} \sup_{\substack{f \in \mathbb{H}^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle| < \infty \quad \text{wobei } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \}.$$

Bemerkungen: 1° $(\bar{H}_*^q(X'), \|\cdot\|_q^*)$ ist normierter Raum (Vollständigkeit ergibt sich später automatisch (6.4)).

$$\begin{aligned} \underline{2^\circ} \quad & \sup_{\substack{f \in \mathbb{H}^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle| \text{ ist bzgl. } r \text{ monoton steigend} \\ & \|f\|_p \leq 1 \end{aligned}$$

$\forall g : D \rightarrow X'$ antiholomorph, also ist auch

$$\|g\|_q^* = \lim_{r \rightarrow 1} \sup_{\substack{f \in \mathbb{H}^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle|.$$

3° Für $g : D \rightarrow X'$ antiholomorph:

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, g \rangle|_q \leq A_q \|g\|_q^* \quad \text{und} \quad \|g\|_q^* \leq \|g\|_q$$

(A_q von g unabhängige Konstante), also

$$\bar{H}^q(X') \hookrightarrow \bar{H}_*^q(X') \subset \{g : D \rightarrow X' \text{ antiholomorph: stetig}$$

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, g \rangle|_q < \infty \}.$$

$$\underline{4^\circ} \quad \text{Für } g \in \overline{H}^Q(X') \text{ ist } \|g\|_Q^* = \sup_{\substack{f \in H^P(X) \\ \|f\|_P \leq 1}} |\langle f, g \rangle| ,$$

insbesondere für $f \in H^P(X)$, $g \in \overline{H}^Q(X')$:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_P \|g\|_Q^* .$$

$$\underline{5^\circ} \quad g: D \rightarrow X' \text{ antiholomorph} \Rightarrow \|g_r\|_Q^* = \sup_{\substack{f \in H^P(X) \\ \|f\|_P \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle| \nearrow \|g\|_Q^* ; \quad 2^\circ$$

insbesondere für $f \in H^P(X)$, $g \in \overline{H}_*^Q(X')$, $r < 1$:

$$|\langle f, g_r \rangle| \leq \|f\|_P \|g_r\|_Q^* \leq \|f\|_P \|g\|_Q^* .$$

Beweis: 1° Nicht unmittelbar klar ist nur:

$$\|g\|_Q^* = 0 \stackrel{!}{\Rightarrow} g = 0 .$$

Nach (6.0) hat man die kanonische injektive Abbildung

$$\overline{H}^Q(X') \rightarrow H^P(X)' .$$

$\|g\|_Q^* = 0$ besagt, daß für alle $r < 1$ $g_r \in \overline{H}^Q(X')$ das Null-

funktional auf $H^P(X)$ ist, also ist $g_r = 0$ in $\overline{H}^Q(X')$ $\forall r < 1$,

d.h. $g(rz) = 0 \quad \forall r < 1 \quad \forall z \in D$, d.h. $g = 0$. (Es genügte natürlich

$g_r = 0$ für ein $r \in (0, 1)$.)

2° Seien $r, R \in [0, 1) \Rightarrow$ mit Lemma (6.2) 1° :

$$\sup_{\substack{f \in H^P(X) \\ \|f\|_P \leq 1}} |\langle f, g_{rR} \rangle| = \sup_{\substack{f \in H^P(X) \\ \|f\|_P \leq 1}} |\langle f_R, g_r \rangle| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{f \in H^P(X) \\ \|f\|_P \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle|, \quad \text{q.e.d.}$$

3° 1. Ungleichung: Sei $x \in X$, $\|x\| \leq 1$. Es ist

$$\langle x, g \rangle_r = \langle x, g_r \rangle \in \overline{H}^q \quad \text{und} \quad [\text{Du p.113}]$$

$$\begin{aligned} \|\langle x, g_r \rangle\|_q &\leq A_q \sup_{\substack{\varphi \in H^p \\ \|\varphi\|_p \leq 1}} |\int \varphi \langle x, g_r \rangle d\lambda| \\ &= A_q \sup_{\substack{\varphi \in H^p \\ \|\varphi\|_p \leq 1}} |\langle \varphi x, g_r \rangle| \\ &\leq A_q \sup_{\substack{f \in H^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle| \leq A_q \|g\|_q^* . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{Ungleichung: } \|g\|_q^* &\leq \sup_{r < 1} \sup_{\substack{f \in H^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle| \\ &= \sup_{r < 1} \|g_r\|_q = \|g\|_q . \end{aligned}$$

4° Nach Lemma (6.2) 2° ist

$$\|g\|_q^* = \sup_{r < 1} \sup_{\substack{f \in H^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f_r, g \rangle| \leq \sup_{\substack{F \in H^p(X) \\ \|F\|_p \leq 1}} |\langle F, g \rangle| .$$

Andererseits gilt gemäß Bemerkung (6.1) für

$$f \in H^p(X), \quad \|f\|_p \leq 1:$$

$$|\langle f, g \rangle| = \lim_{r \rightarrow 1} |\langle f, g_r \rangle| \leq \sup_{r < 1} |\langle f, g_r \rangle| \leq \|g\|_q^* .$$

5° folgt aus 4°, da ja $g_r \in \overline{H}^q(X') \quad \forall r < 1$.

(6.4) Satz: Die Abbildung $\overline{H}_*^Q(X') \rightarrow H^P(X)', g \mapsto G$ mit

$$Gf = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f_r, g_r \rangle \quad \text{ist (wohldefiniert und) iso-}$$

metrischer Isomorphismus.

Anmerkung: Ist $g \in \overline{H}^Q(X') \subset L^Q(X', X)$, so definiert g nach

(6.0) auf $H^P(X)$ das Funktional $f \mapsto \langle f, g \rangle$. Andererseits ist

gemäß (6.3) 3° auch $g \in \overline{H}_*^Q(X')$, definiert also nach dem Satz auf $H^P(X)$ auch das Funktional $f \mapsto \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle$.

Bemerkung (6.1) zeigt, daß beide übereinstimmen.

Es ist m.a.W. unzweideutig, die Wirkung von $g \in \overline{H}_*^Q(X')$ auf $f \in H^P(X)$ mit $\langle f, g \rangle$ zu bezeichnen, d.h. $\langle f, g \rangle := \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle$.

Es sei betont, daß (außer $g \in \overline{H}^Q(X')$) $\langle f, g \rangle$ nicht

$$\int_T \langle f, g \rangle d\lambda = \int_0^{2\pi} \langle f(e^{it}), g(e^{it}) \rangle \frac{dt}{2\pi} \quad \text{ist, dieser Ausdruck ist}$$

nicht definiert, weil $g: D \rightarrow X'$ i.a. keine Randwerte hat. (Dies wird in (6.8) noch näher diskutiert).

Beweis des Satzes: Zunächst gilt für $f \in H^P(X)$,

$$g \in \overline{H}_*^Q(X') : |\langle f_r, g_r \rangle - \langle f, g_r \rangle| \stackrel{(6.3)}{\leq} \|f_r - f\|_P \|g\|_Q^* \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0, \quad 5^\circ$$

da $f_r \rightarrow f$ in $L^P(X)$. Es genügt daher, den Satz in der Version

$Gf = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle$ zu beweisen.

Sei $g \in \bar{H}_*^q(X')$. Für $r < 1$ sei $G_r \in \mathbb{H}^p(X)'$, $G_r f := \langle f, g_r \rangle$.

Es ist $\sup_{r < 1} \|G_r\| = \|g\|_q^* < \infty$. Auf der in $\mathbb{H}^p(X)$ totalen

(3.2) Teilmenge $\{f = x e^{im\theta} : x \in X, m \geq 0\}$ existiert $\lim_{r \rightarrow 1} G_r f :$

Denn sei $x \in X, m \geq 0$. Nach (6.3) 3° ist $\langle x, g \rangle \in \bar{H}^q \subset L^q$.

$$\text{Sei } f = x e^{im\theta} \Rightarrow \langle f, g_r \rangle = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \langle x, g_r \rangle \frac{d\theta}{2\pi} = \langle x, g_r \rangle^\wedge(-m)$$

$$= r^m \langle x, g \rangle^\wedge(-m) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \langle x, g \rangle^\wedge(-m).$$

$\uparrow$
 vgl. Bew. von
 La. (6.2) 1°

Daher existiert $Gf = \lim_{r \rightarrow 1} \langle f, g_r \rangle \quad \forall f \in \mathbb{H}^p(X), G \in \mathbb{H}^p(X)'$ und

$$\|G\| \leq \|g\|_q^*.$$

Ist $G = 0$, so folgt aus der Rechnung eben, daß

$$\forall x \in X \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 : \langle x, g \rangle^\wedge(-m) = 0$$

Wegen $\langle x, g \rangle \in \bar{H}^q \subset L^q$ folgt $\langle x, g \rangle^\wedge(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \langle x, g \rangle = 0 \text{ in } \bar{H}^q \quad \forall x \in X \Rightarrow g = 0.$$

Die Abbildung ist also injektiv.

Surjektivität und andere Ungleichung:

$$\text{Für } \varphi \in L^1(X', X) \text{ sei } a_\varphi : D \rightarrow X', a_\varphi(re^{i\theta}) := \sum \hat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{in\theta} \\ n \geq 0$$

die (als antiholomorphe Funktion auf D stets existierende) antianalytische Projektion von φ .

Sei nun $G \in \mathbb{H}^p(X)'$ gegeben und wähle eine Hahn-Banach-Fortsetzung $\tilde{G} \in L^p(X)'$ mit gleicher Funktional-Norm. Nach (0.6) ist $\tilde{G}f = \langle f, \tilde{g} \rangle$ für ein $\tilde{g} \in L^q(X', X) = h^q(X')$ mit

$$\|\tilde{g}\|_q = \|\tilde{G}\| = \|G\| \quad (f \in L^p(X)). \text{ Setze } g := a_{\tilde{g}} : D \rightarrow X'.$$

Für $f \in H^p(X)$ ist $\langle f, g_r \rangle = \langle f, \tilde{g}_r \rangle \xrightarrow{r \rightarrow 1} \langle f, \tilde{g} \rangle = \tilde{G}f = Gf$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\|g\|_q^* \leq \|G\|$:

$$\|g\|_q^* = \sup_{r < 1} \sup_{\substack{f \in H^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle| = \sup_{r < 1} \sup_{f \in H^p(X)} |\langle f, \tilde{g}_r \rangle|$$

$$\leq \sup_{r < 1} \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, \tilde{g}_r \rangle| = \sup_{r < 1} \|\tilde{g}_r\|_q = \|\tilde{g}\|_q = \|G\|,$$

q.e.d.

Insbesondere ist $\bar{H}_*^q(X')$ Banachraum.

An dem letzten Beweisteil (Surjektivität) kann man noch folgendes ablesen: Nach (6.0) hat man den kanonischen isometrischen Isomorphismus $L^q(X', X) / H_0^q(X') \longrightarrow H^p(X)'$. Die Komposition

$$L^q(X', X) / H_0^q(X') \longrightarrow H^p(X)' \longrightarrow \bar{H}_*^q(X') \text{ ist gerade } [h] \mapsto a_h$$

($h \in L^q(X', X)$, $[\cdot]$ Restklasse mod $H_0^q(X')$).

Also gilt der

Zusatz: $L^q(X', X) / H_0^q(X') \longrightarrow \bar{H}_*^q(X'), [h] \longmapsto a_h$

ist isometrischer Isomorphismus. Insbesondere ist

$$\bar{H}_*^q(X') = \{a_h : h \in L^q(X', X)\}.$$

Der Satz von Bukhvalov (6.0) ordnet sich dem Satz (6.4) in natürlicher Weise unter:

(6.5) Corollar (Bukhvalov):

X hat die analytische Projektion $(p) \Leftrightarrow H^p(X)' \cong \bar{H}^q(X')$ unter der kanonischen Abbildung.

Beweis: Ich formuliere zunächst die 2. Bedingung mit Hilfe des Satzes (6.4) um. Man hat das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{H}_*^q(X') \\ & \nearrow & \downarrow \text{iso. Iso.} \\ \bar{H}^q(X') & & H^p(X)' \\ & \searrow & \end{array}$$

(Der obere Pfeil ist die Inklusion (6.3)3°, der untere die harmonische Abbildung $g \rightarrow \langle \cdot, g \rangle = \int \langle \cdot, g \rangle d\lambda$ von (6.0).)

Dieses Diagramm kommutiert nach der Anmerkung zu Satz (6.4). Das Corollar ist also äquivalent zur

Bemerkung: X hat die analytische Projektion (p)

$\Leftrightarrow \bar{H}_*^q(X') = \bar{H}^q(X')$ (als Mengen), mit (dann automatisch) äquivalenten Normen $\|\cdot\|_q^*$, $\|\cdot\|_q$.

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei A_p die Norm der analytischen Projektion auf $L^p(X)$. Für $g: D \rightarrow X'$ antiholomorph:

$$\|g\|_q = \sup_{r < 1} \|g_r\|_q = \sup_{r < 1} \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f, g_r \rangle|$$

$$= \sup_{r < 1} \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ \|f\|_p \leq 1}} |\langle f^a, g_r \rangle|$$

$$\leq \sup_{r < 1} \sup_{\substack{F \in H^p(X) \\ \|F\|_p \leq A_p}} |\langle F, g_r \rangle| = A_p \|g\|_q^*.$$

$$\|g\|_q^* \leq \|g\|_q \text{ gilt immer ((6.3)3°).}$$

" $\Leftarrow$ ": Sei C_q die Norm von $\text{id} : \overline{H}_*^q(X') \rightarrow \overline{H}^q(X')$.

Für $f \in L^p(X)$ ein trigonometrisches Polynom ist $f^a \in H^p(X)$, also nach Satz (6.4)

$$\begin{aligned} \|f^a\|_p &= \sup_{\substack{g \in \overline{H}_*^q(X') \\ \|g\|_q^* < 1}} |\langle f^a, g \rangle| \leq \sup_{g \in \overline{H}^q(X')} |\langle f^a, g \rangle| \\ &= \sup_{g \in \overline{H}^q(X')} |\langle f, g \rangle| \leq C_q \|f\|_p, \quad \text{q.e.d.} \\ \|g\|_q &\leq C_q \end{aligned}$$

Im folgenden werden einige Aussagen über die Lage von $\overline{H}^q(X')$ in $\overline{H}_*^q(X')$ gemacht.

(6.6) Satz: $1^\circ \quad g \in \overline{H}_*^q(X') \Rightarrow g_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} g \quad \text{schwach}^*$

B.h. $\sigma(\overline{H}_*^q(X'), H^p(X))$ und $\|g_r\|_q^* \nearrow \|g\|_q^*$

2° Die antianalytischen Polynome liegen schwach * -folgendicht in $\overline{H}_*^q(X')$. Sogar: $B_{\overline{H}_*^q(X')} \cap \{\text{antianalytische Polynome}\}$ ist schwach * -folgendicht in $B_{\overline{H}_*^q(X')}$.

Beweis: 1° Die 1.Aussage ist trivial wegen Anmerkung (6.4).

Die 2.Aussage ist (6.3)5 $^\circ$.

2° Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die schwach * -Dichtheit der antianalytischen Polynome in $\overline{H}_*^q(X')$ schon aus folgendem "abstrakten" Kriterium folgt: Y Banachraum, $Z \subset Y'$ Untervektorraum, dann Z schwach * -dicht in $Y' \Leftrightarrow$

$${}^\perp Z = \{y \in Y : \langle y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in Z\} = 0.$$

(Beweis: Hahn-Banach. Setze hier $Y := H^p(X)$, $Z := \{\text{antianalytische Polynome}\}$).

Zum Beweis von 2° genügt es offenbar, die 2. Behauptung zu zeigen. Sei dazu $g \in B_{\bar{H}_*^Q(X')}$. Wähle $r_n \rightarrow 1$ 1° $g_{r_n} \rightarrow g$ schwach*

und $\|g_{r_n}\|_Q \leq \|g\|_Q \leq 1$; außerdem $g_{r_n} \in \bar{H}^Q(X')$.

Setze $h_n := r_n g_{r_n} \Rightarrow h_n \rightarrow g$ schwach*, $\|h_n\|_Q^* < 1$ und

$h_n \in \bar{H}^Q(X')$. Nun hat man $\bar{H}^Q(X') \hookrightarrow \bar{H}^Q(X') \hookrightarrow H_*^Q(X')$, also
Einb. ste.

$h_n \in B_{\bar{H}_*^Q(X')} \cap \bar{H}^Q(X')$ offen in $\bar{H}^Q(X')$.

Da die antianalytischen Polynome dicht in $\bar{H}^Q(X')$ liegen (3.2),

gibt es ein antianalytisches Polynom $p_n \in B_{\bar{H}_*^Q(X')}$ mit

$$\|p_n - h_n\|_Q \leq \frac{1}{n}.$$

Für $f \in H^P(X)$: $|\langle f, p_n - h_n \rangle| \leq \|f\|_P \|p_n - h_n\|_Q \leq \frac{1}{n} \|f\|_P \rightarrow 0$,

also gilt auch $p_n \rightarrow g$ schwach* in $\bar{H}_*^Q(X')$.

Corollar: $f \in H^P(X) \Rightarrow \|f\|_P = \sup_{\substack{g \in \bar{H}^Q(X') \\ \|g\|_Q^* \leq 1}} |\langle f, g \rangle| = \sup_{\substack{g \in \bar{H}^Q(X') \\ \|g\|_Q^* \leq 1}} |\langle f, g \rangle|$

Beweis: Nach 2° im Satz ist insbesondere

$\bar{H}^Q(X') \cap B_{\bar{H}_*^Q(X')}$ (also erstreckt $\bar{H}^Q(X') \cap B_{\bar{H}_*^Q(X')}$) schwach*-

dicht in $B_{\bar{H}_*^Q(X')}$. Und allgemein gilt ja: Y Banachraum,

$Z \subset Y'$ Untervektorraum mit $Z \cap B_Y$ schwach*-dicht in $B_Y \Rightarrow Z$

normierend für Y , d.h. $\forall y \in Y: \|y\| = \sup_{z \in Z} |\langle y, z \rangle|$.

$$\|z\|_{Y'} \leq 1$$

Bzgl. der Normtopologie gilt:

(6.7) Satz: $1^\circ \quad X' \text{ RNP} \Rightarrow \forall g \in \overline{H}_*^Q(X') : g_r \rightarrow g$

$2^\circ \quad \text{Hat } X' \text{ aRNP, so:}$

$$\overline{H}^Q(X') \text{ dicht in } \overline{H}_*^Q(X') \Leftrightarrow X' \text{ RNP}$$

(also i.a. nicht dicht: z.B. für $X = l^\infty, L^\infty, C$).

$3^\circ \quad \overline{H}^Q(X') \text{ abgeschlossen in } \overline{H}_*^Q(X') \Leftrightarrow \overline{H}^Q(X') = \overline{H}_*^Q(X') .$

Beweis: 1° Nach (6.4) Zusatz ist $L^Q(X', X) = h^Q(X') \rightarrow H_*^Q(X') ,$

$h \mapsto {}^a h$ stetig und surjektiv. Offenbar gilt ${}^a(h_r) = ({}^a h)_r .$

Hat nun $X' \text{ RNP}$, so ist $L^Q(X', X) = L^P(X)' = L^Q(X') \quad [\text{DU IV.1.1}] .$

Sei $g \in \overline{H}_*^Q(X') \Rightarrow \exists h \in L^Q(X') = H^Q(X') \text{ mit } g = {}^a h .$ Nach Satz

(1.11) gilt $h_r \rightarrow h \text{ in } L^Q(X') \Rightarrow g_r = ({}^a h)_r = {}^a(h_r) \rightarrow {}^a h = g \text{ in }$

$\overline{H}_*^Q(X') .$

$2^\circ \quad " \Leftarrow " \text{ wegen } 1^\circ .$

$" \Rightarrow " : \text{Identifiziert man } \overline{H}_*^Q(X') = H^P(X)' = L^Q(X', X) / H_0^Q(X') ,$

so besagt die Voraussetzung, daß die kanonische Abbildung

$\overline{H}^Q(X') \rightarrow L^Q(X', X) / H_0^Q(X') \text{ dichtes Bild hat.}$

Da X' die aRNP hat, ist $H_0^Q(X') \subset L^Q(X') .$

Trivialerweise ist die kanonische Abbildung

$L^Q(X') / H_0^Q(X') \longrightarrow L^Q(X', X) / H_0^Q(X') \text{ Isometrie, hat also abge-}$

schlossenes Bild. Betrachtet man nun das kommutative Diagramm

kanonischer Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^Q(X') & \xrightarrow{\text{dicht}} & L^Q(X', X) / H_0^Q(X') \\ & \searrow & \nearrow \text{isometr.} \\ & L^Q(X') / H_0^Q(X') & \end{array} ,$$

so folgt i surjektiv, d.h. $L^q(X', X) = L^q(X') + H_0^q(X') = L^q(X')$,
d.h. $L^p(X)' = L^q(X', X) = L^q(X')$.

Nach [DU IV.1.1] hat X' die RNP.

Anmerkung: Man kann leicht zeigen, daß die kanonische Abbildung

$$L^q(X') / H_0^q(X') \longrightarrow L^q(X', X) / H_0^q(X') \quad \text{stets Isometrie ist, d.h.}$$

auch ohne die Voraussetzung " X' a RNP" ($\Leftrightarrow H_0^q(X') = H_0^q(X')$).

3° gilt, "obwohl" $\bar{H}^q(X')$ i.a. nicht dicht in $\bar{H}_*^q(X')$ ist:

Sei $\bar{H}^q(X')$ abgeschlossen in $\bar{H}_*^q(X') \Rightarrow \exists$ Konstante C_q mit

$$\|g\|_q \leq C_q \|g\|_q^* \quad \forall g \in \bar{H}^q(X').$$

Sei nun $f \in L^p(X)$ ein trigonometrisches Polynom mit analytischer
Projektion $f^a \in H^p(X)$. Nach Corollar (6.6) ist

$$\begin{aligned} \|f^a\|_p &= \sup_{\substack{g \in \bar{H}^q(X') \\ \|g\|_q^* \leq 1}} |\langle f^a, g \rangle| \leq \sup_{\substack{g \in \bar{H}^q(X') \\ \|g\|_q \leq C_q}} |\langle f^a, g \rangle| \\ &= \sup_{\substack{g \in \bar{H}^q(X') \\ \|g\| \leq C_q}} |\langle f, g \rangle| \leq C_q \|f\|_p, \end{aligned}$$

d.h. X hat die analytische Projektion (p). Mit Bemerkung (6.5)
folgt $\bar{H}^q(X') = \bar{H}_*^q(X')$.

Bemerkung: Nach 2° (mit der im Beweis gemachten Identifizierung)
ist $\bar{H}^q(X')$ in $L^q(X', X) / H_0^q(X')$ i.a. nicht dicht. Dagegen ist

$\bar{H}^q(X')$ in $L^q(X') / H_0^q(X')$ stets dicht (unter der kanonischen

injektiven Abbildung $\bar{H}^q(X') \rightarrow L^q(X') / H_0^q(X')$). Denn die Rest-

klassen der trigonometrischen Polynome sind dicht in $L^Q(X') / H_0^Q(X')$, und das sind gerade die Bilder der antianalytischen Polynome unter dieser Abbildung.

Abschließend untersuche ich

(6.8) Randwerte von $\overline{H}_*^Q(X')$ -Funktionen

Da i. a. $\overline{H}_*^Q(X') \supsetneq \overline{H}^Q(X')$ und schon $H^Q(X')$ -Funktionen nur in einem sehr schwachen Sinn Randwerte haben, kann man nicht viel erwarten. Immerhin, für $g \in \overline{H}_*^Q(X')$ und alle $x \in X$ ist

$\langle x, g \rangle \in \overline{H}^Q$ ((6.3)3°) mit Randfunktion $\langle x, g \rangle^* \in L^Q$. Man

könnte daher hoffen, daß es eine Funktion $g^*: T \rightarrow X'$ gibt, so daß $\forall x \in X: \langle x, g^* \rangle = \langle x, g \rangle^*$ f.ü. (Für $g \in \overline{H}^Q(X')$ gibt es ein derartiges g^* , nämlich das $g^* \in L^Q(X', X)$ mit $g = P[g^*]$).

Dies ist jedoch nicht der Fall:

Nach (6.4) Zusatz ist $\overline{H}_*^Q(X') = \{ {}^a h : h \in L^Q(X', X) \}$.

Offenbar gilt $\langle x, {}^a h \rangle = {}^a \langle x, h \rangle \quad \forall x \in X$.

Sei nun $g = {}^a h \in \overline{H}_*^Q(X')$ ($h \in L^Q(X', X)$). Für eine Funktion

$g^*: T \rightarrow X'$ ist daher die Eigenschaft $\forall x \in X: \langle x, g^* \rangle = \langle x, g \rangle^*$

f.ü. äquivalent zur Eigenschaft $\forall x \in X: \langle x, g^* \rangle = ({}^a \langle x, h \rangle)^* =$

$= {}^a \langle x, h \rangle$ f.ü. (das letzte $=$ -Zeichen identifiziert die skalare $\overline{H}^Q$ -Funktion ${}^a \langle x, h \rangle$ mit ihrem Randwert).

Nach den Beispielen (5.13), (5.14), umformuliert für die anti-analytische statt die analytische Projektion, gibt es aber zu $h \in L^\infty(X', X)$ eine solche Funktion i. a. nicht, z. B. falls $X = JT$ (5.14) oder $X = l^1$ (5.13). Im letzten Beispiel war sogar h stark meßbar, d. h. $h \in L^\infty(l^\infty)$ und nicht nur $\in L^\infty(l^\infty, l^1)$.

Es habe nun X' die RNP (was in den beiden bisherigen Beispielen nicht der Fall war).

Dann gilt für $g \in \overline{H}_*^Q(X')$: $g_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} g$ stark in $\overline{H}_*^Q(X')$ (Satz (6.7) 1°), und da die g_r sogar antiholomorph auf $\frac{1}{r}D$ sind, könnte man in dieser Situation vielleicht Besseres erwarten. Doch auch in diesem Fall existiert i.a. kein $g^*: T \rightarrow X'$ mit $\forall x \in X: \langle x, g^* \rangle = \langle x, g \rangle^* \text{ f.ü.}$

Dies folgt, genauso wie eben, aus dem folgenden $X' = l^1$ -wertigen Beispiel, dessen Aussage exakt analog zum c_0 -Beispiel (5.13) ist (insbesondere auch für die analytische Projektion formuliert).

(6.9) Beispiel (l^1): Es gibt $f \in L^\infty(l^1)$ mit

(a) $\lim_{r \rightarrow 1} C[f](re^{i\theta})$ existiert für kein θ in l^1 bzgl. $\sigma(l^1, c_0)$.

Insbesondere $C[f] \notin N(l^1)$ (wegen Satz (2.13)).

(b) Es gibt keine Funktion $F: T \rightarrow l^1$ so daß $\forall x \in c_0$:
 $\langle x, F \rangle = \langle x, f \rangle^a \text{ f.ü.}$

Ich verwende die Bezeichnungen und das Lemma zu Beginn der Konstruktion des Beispiels (5.13). Ich realisiere l^1 als $l^1(tr)$. Seien $\varepsilon_m > 0$ mit $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m < \infty$. Setze

$$f: T \rightarrow l^1(tr), f(\theta) := (\varepsilon_m \chi_{T_{mj}}(\theta))_{(m,j) \in tr}.$$

f bildet tatsächlich nach $l^1(tr)$ ab und ist beschränkt, da es zu festem $\theta \in T$ und $m \in \mathbb{N}_0$ genau ein $j \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$ gibt mit $\theta \in T_{mj}$ (also ist $\|f(\theta)\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \forall \theta$).

f ist meßbar nach dem Satz von Pettis, also $f \in L^\infty(l^1(tr))$.

Nach Lemma (5.13) ist

$$\operatorname{Im} C[f](re^{i\theta}) = \left(-\frac{1}{2\pi} \epsilon_m \ln \left| \frac{e^{it_{mj}-re^{i\theta}}}{e^{is_{mj}-re^{i\theta}}} \right| \right)_{(m,j) \in \operatorname{tr}}$$

↓
Komp.-weise
r → 1 (falls θ nicht dyadisch)

$$(\epsilon_m \operatorname{Im} \chi_{T_{mj}}^a(\theta))_{(m,j)} = \left(-\frac{1}{2\pi} \epsilon_m \ln \left| \frac{e^{it_{mj}-e^{i\theta}}}{e^{is_{mj}-e^{i\theta}}} \right| \right)_{(m,j) \in \operatorname{tr}}$$

Es genügt zu zeigen: Bei geeigneter Wahl von (ϵ_m) liegt das letzte Tupel für kein (nichtdyadisches) θ in $l^1(\operatorname{tr})$.

Lemma: Für θ nicht-dyadisch, $m \geq 3$:

$$\sum_{j=0}^{2^m-1} \left| \ln \left| \frac{e^{i\theta} - e^{it_{mj}}}{e^{i\theta} - e^{is_{mj}}} \right| \right| \geq -\ln \frac{2\pi}{2^m}.$$

Aus dem Lemma folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned} 2\pi \left\| (\epsilon_m \operatorname{Im} \chi_{T_{mj}}^a(\theta))_{(m,j) \in \operatorname{tr}} \right\|_1 &\geq \\ &\geq \sum_{m=3}^{\infty} \epsilon_m \sum_{j=0}^{2^m-1} \left| \ln \left| \frac{e^{it_{mj}-e^{i\theta}}}{e^{is_{mj}-e^{i\theta}}} \right| \right| \geq \quad (\text{Lemma}) \\ &\geq \sum_{m=3}^{\infty} \epsilon_m (m \ln 2 - \ln 2\pi) \geq \\ &\geq \ln 2 \sum_{m=3}^{\infty} m \epsilon_m \stackrel{!}{=} \infty \\ \text{z.B. für } \epsilon_m &:= \frac{1}{m} \quad (m \geq 3), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

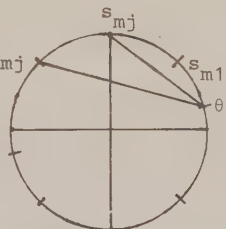
Beweis des Lemmas: Sei $m \geq 3$ fest und $S(\theta)$ die zu untersuchende Summe

(a) O.B.d.A.: $\theta \in T_{m0}$. Denn sei $k \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$ mit $\theta \in T_{mk}$.

Dann ist $\tilde{\theta} := \theta - s_{mk} \in T_{m0}$ und $S(\tilde{\theta}) = S(\theta)$. Dies ist anschaulich klar am Einheitskreis: die beiden Summen bestehen einfach aus den gleichen Summanden. Genauer: Die Terme $j = 0, \dots, 2^m - 1 - k$ in $S(\tilde{\theta})$ sind die Terme $j = k, \dots, 2^m - 1$ in $S(\theta)$, und die Terme $j = 2^m - k, \dots, 2^m - 1$ in $S(\tilde{\theta})$ sind die Terme $j = 0, \dots, k - 1$ in $S(\theta)$.

(b) Sei also $\theta \in T_{m0}$. Mit $s_{m,j+1} = t_{mj}$ und $t_{m,2^{m-1}-1} = \pi$

$$\text{folgt: } S(\theta) \geq \sum_{j=1}^{2^{m-1}-1} \left| \ln \frac{|e^{it_{mj}} - e^{i\theta}|}{|e^{is_{mj}} - e^{i\theta}|} \right| \geq \sum_{j=1}^{2^{m-1}-1} \ln \frac{|e^{it_{mj}} - e^{i\theta}|}{|e^{is_{mj}} - e^{i\theta}|}$$

$$= \underbrace{\ln |-1 - e^{i\theta}|}_{\geq 1} - \underbrace{\ln |e^{is_{m1}} - e^{i\theta}|}_{\leq 2^{-m} 2\pi, \text{ da } \theta \in T_{m0}}$$


The diagram shows a unit circle with a horizontal axis. A point θ is marked on the positive x-axis. A point s_{m1} is marked on the circle in the first quadrant. A point s_{mj} is marked on the circle in the second quadrant. A point $s_{m,j+1} = t_{mj}$ is marked on the circle in the third quadrant. The angle between the positive x-axis and the line segment to s_{m1} is labeled θ . The arc length between s_{m1} and θ is indicated as being small.

$$\geq -\ln \frac{2\pi}{2^m}, \text{ q.e.d.}$$

Anmerkung: Würde man in der 1. Abschätzung nicht etwa die Hälfte der Terme verschenken, so erhielte man die (für meine Zwecke irrelevante) Verbesserung $S(\theta) \geq -2 \ln \frac{2\pi}{2^m}$.

Schlußbemerkung: Sei $f \in L^\infty(l^1(tr))$ wie im Beispiel. Die antianalytische Projektion ${}^a f$ von f wird gegeben durch den komplex-konjugierten Cauchy-Kern $\bar{C}_r(t) = \frac{1}{1-re^{-it}}$.

Da f (koordinatenweise) reell ist, hat ${}^a f$ also bis aufs Vorzeichen den gleichen pathologischen Imaginärteil wie er oben für $C[f] = f^a$ berechnet wurde (der Realteil ist im wesentlichen das harmlose $f = P[f]$ selbst wegen $P_r + iQ_r = 2C_r - 1$).

Wenn man sich vorstellt, daß gemäß (6.4) Zusatz

${}^a f \in \bar{H}_*^q(l^1(tr)) = H^p(c_0(tr))' \quad \forall q \in (1, \infty)$ ist, so erscheint es unwahrscheinlich, daß es eine einfache Beschreibung von $H^p(c_0)'$ gibt.

Literatur

A) Bücher

- [B] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 2. Aufl., de Gruyter, Berlin etc. 1974
- [BP] C.Bessaga, A.Pelczyński, Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology, PWN, Warszawa 1975 (Mon. mat. 58)
- [BM] J.Burbea, P.Masani, Banach and Hilbert Spaces of Vector-Valued Functions, Pitman, Boston etc. 1984 (Res. Notes in Math. 90)
- [DU] J.Diestel, J.J.Uhl, Jr., Vector Measures, AMS, Providence (Rh.I.) 1977 (Math. Surveys 15)
- [Di] N.Dinculeanu, Vector Measures, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966 (Hochschulbücher für Math. 64)
- [DS] N.Dunford, J.T.Schwartz, Linear Operators I,II, Interscience Publ., New York etc. 1964,1963 (Pure and Appl. Math. VII)
- [Du] P.L.Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York etc. 1970 (Pure and Appl. Math. 38)
- [G] J.B.Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York etc. 1981 (Pure and Appl. Math. 96)
- [Ha] F.Hausdorff, Set Theory, Chelsea Publ. Comp., New York (N.Y.) 1957
- [HP] E.Hille, R.S.Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, AMS, Providence (Rh.I.) 1957 (AMS Coll. Publ. XXXI)
- [Ho] K.Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (N.J.) 1962
- [IT] A.Ionescu-Tulcea, C.Ionescu-Tulcea, Topics in the Theory of Lifting, Springer, Berlin etc. 1969 (Ergebnisse ... 48)
- [Kö] G.Köthe, Topological Vector Spaces II, Springer, Berlin etc. 1979 (Grundlehren ... 237)
- [Ko] P.Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge etc. 1980 (London Math. Soc. Lect. Note Ser. 40)
- [L] S.Lang, Analysis II, Addison-Wesley, Inc., Reading (Mass.) 1969

- [LT] J.Lindenstrauss, L.Tzafriri, Classical Banach Spaces, Springer, Berlin etc. 1973 (Lect. Notes in Math. 338)
- [LT I,II] J.Lindenstrauss, L.Tzafriri, Classical Banach Spaces I,II, Springer, Berlin etc. 1977,1979 (Ergebnisse ... 92,97)
- [Pe] A.Pelczyński, Banach Spaces of Analytic Functions and Absolutely Summing Operators, AMS, Providence (Rh.I.) 1977 (Reg. Conf. Ser. in Math. 30)
- [Pr] I.I.Priwalow, Randeigenschaften analytischer Funktionen, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Hochschulbücher für Math. 25)
- [R] W.Rudin, Real and Complex Analysis, 2nd ed., Tata McGraw-Hill Publ. Co. Ltd., New Delhi 1981
- [S] H.H.Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer, New York etc. 1974 (Grundlehren ... 215)
- [T] M.Talagrand, Pettis Integral and Measure Theory, AMS, Providence (Rh.I.) 1984 (MAMS 307)
- [Z I,II] A.Zygmund, Trigonometric Series I,II, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1968

B) Zeitschriftenartikel etc.

- [1] D.J.Aldous, Unconditional sequences and martingales in $L^p(F)$, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 85 (1979), 117-123
- [2] R.M.Aron, J.Globevnik, M.Schottenloher, Interpolation by vector-valued analytic functions, Rend. Mat.(2) 9 Ser.VI (1976), 347-364
- [3] V.Aurich, Bounded holomorphic embeddings of the unit disc into Banach spaces, manu. math. 45 (1983), 61-67
- [4] J.Batt, W.Hiermeyer, On compactness in $L_p(\mu, X)$ in the weak topology and in the topology $\sigma(L_p(\mu, X), L_q(\mu, X'))$, Math. Z. 182 (1983), 409-423
- [5] A.Benedek, A.P.Calderon, R.Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, Proc. Nat. Acad. Sci. 48 (1962), 356-365
- [6] R.Bonic, J.Frampton, H.Tromba, Λ -manifolds, J.F.A. 3 (1969), 310-320

- [7] J.Bourgain, Embedding L^1 in L^1/H^1 , TAMS 278 (1983), 689-702
- [8] J.Bourgain, Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ark. Mat. 21 (1983), 163-168
- [9] J.Bourgain, Bilinear forms on H^∞ and bounded bianalytic functions, TAMS 286 (1984), 313-337
- [10] J.Bourgain, Extension of a result of Benedek, Calderon and Panzone, Ark. Mat. 22 (1984), 91-95
- [11] J.Bourgain, H.P.Rosenthal, Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory, J.F.A. 52 (1983), 149-188
- [12] A.V.Bukhvalov, On an analytic representation of operators with abstract norm, Sov. Math. Dokl. 14 (1973), 197-201
- [13] A.V.Bukhvalov, Continuity of operators in spaces of measurable vector-valued functions with applications to the study of Sobolev spaces and spaces of analytic functions in the vector-valued case, Sov. Math. Dokl. 20 (1979), 480-484
- [14] A.V.Bukhvalov, The duals to the spaces of analytic vector-valued functions and the duality of functions generated by these spaces, Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova 92 (1979), 30-50 (ZBl. 431:46050)
- [15] A.V.Bukhvalov, Hardy spaces of vector-valued functions, J. Sov. Math. 16 (1981), 1051-1059
- [16] A.V.Bukhvalov, A.A.Danilevich, Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach space, Math. Notes Acad. Sci. USSR 31 (1982), 104-110
- [17] D.L.Burkholder, A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions, in: Proc. Conf. Harm. Ana. in Honour of A.Zygmund, Uni. of Chicago (Ill.) 1981, 1983, 270-286
- [18] O.N.Capri, A.González Domingues, On operator-valued analytic functions with positive real part whose logarithm belongs to a C_p class, Studia Math. 77 (1983), 183-196
- [19] M.Cotlar, C.Sadosky, Vector valued inequalities of Marcinkiewicz-Zygmund and Grothendieck type for Toeplitz forms, in: Harmonic Analysis, Proc. Cortona 1982, LNM 992, 294-307

- [20] A.A.Danilevich, Some applications of abstract analytic functions to the investigation of boundary properties of series of holomorphic functions, *Sov. Math. Dokl.* 16 (1975), 816-819
- [21] A.A.Danilevich, Some boundary properties of abstract analytic functions, and their applications, *Math. USSR Sbornik* 29 (1976), 453-474
- [22] F.Delbaen, Semi-embeddings and Radon-Nikodým spaces, *Bull. Soc. Math. Belg.* 36 (1984), 5-10
- [23] J.Diestel, J.J.Uhl, Jr., Progress in vector measures - 1977-1983, in: *Measure Theory and its Applications*, Proc. Sherbrooke, Canada, 1982, LNM 1033
- [24] P.N.Dowling, Some results on the analytic Radon-Nikodým property, Preprint, Univ. Coll. Dublin, Belfield, Dublin 4, Ireland
- [25] P.N.Dowling, Representable operators and the analytic Radon-Nikodým property, Preprint, Dept. Math. Sci., Kent State Univ., Kent, Ohio 44242
- [26] G.A.Edgar, Analytic martingale convergence, Preprint
- [27] L.Egghe, Boundary limits of harmonic and analytic functions with values in a Banach space, Preprint, Limburgs Univ. Centrum, Univ. Campus, B-3610 Diepenbeek (Belgium)
- [28] P.Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* 30 (1906), 335-400
- [29] S.Fisher, Schwarz's lemma for vector-valued analytic functions, *J.F.A.* 8 (1971), 86-94
- [30] N.Ghoussoub, B.Maurey, Counterexamples to several problems concerning G_δ -embeddings, *PAMS* 92 (1984), 409-412
- [31] N.Ghoussoub, B.Maurey, G_δ -embeddings in Hilbert space, *J.F.A.* 61 (1985), 72-97
- [32] N.Ghoussoub, H.P.Rosenthal, Martingales, G_δ -embeddings and quotients of L_1 , *Math. Ann.* 264 (1983), 321-332
- [33] C.Grossetête, Sur certaines classes de fonctions harmoniques dans le disque à valeur dans un espace vectoriel topologique localement convexe, *C.R. Acad. Sci. Paris* 273 (1971), 1048-1051

- [34] C.Grossetête, Classes de Hardy et de Nevanlinna pour les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles, C.R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), 251-253
- [35] A.Grothendieck, Applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Can. J. Math. 5 (1953), 129-173
- [36] A.Grothendieck, Une caractérisation vectorielle -metrique des espaces L^1 , Can. J. Math. 7 (1955), 552-561
- [37] J.A.Gutierrez, H.E.Lacey, On the Hilbert transform for Banach space valued functions, in: Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces, Cleveland 1981, LNM 939, 73-80
- [38] L.A.Harris, Coefficient inequalities for L^p -valued analytic functions, Can. Math. Bull. 24 (1981), 347-350
- [39] M.Heins, Vector-valued harmonic functions, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 35: Functions, Series, Operators (1980), 621-632
- [40] W.B.Johnson, L.Tzafriri, Some more Banach spaces which do not have local unconditional structure, Houston J. Math. 3 (1977), 55-60
- [41] W.Kaballo, Lifting-Probleme für $\mathcal{H}^\infty$ -Funktionen, Arch. Math. 34 (1980), 540-549
- [42] W.Kaballo, On Fredholm operator valued H^p -functions, in: Proc. Toeplitz Mem. Conf., Tel Aviv, Birkhäuser 1982, 313-319
- [43] J.Lindenstrauss, A.Pelczyński, Absolutely summing operators in L_p -spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), 275-326
- [44] J.Lindenstrauss, A.Pelczyński, Contributions to the theory of classical Banach spaces, J.F.A. 8 (1971), 225-249
- [45] J.Lindenstrauss, H.P.Rosenthal, The $\mathcal{X}_p$ spaces, Isr. J. Math. 7 (1969), 325-349
- [46] J.Lindenstrauss, C.Stegall, Examples of separable spaces which do not contain l_1 and whose duals are non-separable, Studia Math. 54 (1975), 81-105
- [47] H.P.Lotz, N.T.Peck, H.Porta, Semi-embeddings of Banach spaces, Proc. Edinb. Math. Soc. 22 (1979), 233-240

- [48] H.P.Lotz, N.T.Peck, H.Porta, Semiembeddings in linear topological spaces, in: Conf. on Harmonic Analysis in Honour of A.Zygmund, II, Uni. of Chicago (Ill.) 1981, 1983, 749-763
- [49] B.Maurey, Système de Haar, II, in: Sém. Maurey - Schwartz 1974-1975, Ecole Polytechnique, Paris 1975
- [50] B.Maurey, G.Pisier, Caractérisation d'une classe d'espaces de Banach par des propriétés de series aléatoires vectorielles, C.R. Acad. Sci. Paris 277 (1973), 687-690
- [51] T.R.McConnell, On Fourier multiplier transforms of Banach-valued functions, TAMS 285 (1984), 739-757
- [52] L.Nachbin, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, TAMS 68 (1950), 28-64
- [53] A.Pelczyński, Uncomplemented function algebras with separable annihilator, Duke Math. J. 33 (1966), 605-612
- [54] V.S.Pilidi, A class of Hardy-type spaces of operator-valued functions, Funct. Ana. Appl. 16 (1982), 71-72
- [55] V.S.Pilidi, On a certain class of analytic operator-valued functions, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 1982, 2 (237) (1982), 41-48 (Zbl. 495:46027)
- [56] H.P.Rosenthal, On totally incomparable Banach spaces, J.F.A. 4 (1969), 167-175
- [57] H.P.Rosenthal, On subspaces of L^P , Ann. Math. Sér.2 97 (1973), 344-373
- [58] H.P.Rosenthal, The Banach spaces $C(K)$ and $L^P(\mu)$, BAMS 81 (1975), 763-781
- [59] J.L.Rubio de Francia, Vector valued inequalities for Fourier series, PAMS 78 (1980), 525-528
- [60] J.L.Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and vector valued inequalities, in: Harmonic Analysis, LNM 908 (1982), 86-101
- [61] J.L.Rubio de Francia, Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach spaces, Studia Math. 81 (1985), 95-105

- [62] J.L.Rubio de Francia, F.J.Ruiz, J.L.Torrea, Les opérateurs de Caldéron-Zygmund vectoriels, C.R. Acad. Sci. Paris 297 (1983), 477-480
- [63] F.J.Ruiz Blasco, J.L.Torrea Hernandez, On the dual of Hardy spaces of vector-valued functions, Proc. of the 8th Portuguese-Spanish Conf. on Math., II, Univ. Coimbra 1981, 257-261 (MR 83m:46064)
- [64] R.Ryan, Boundary values of analytic vector-valued functions, Indag. Math, 65 (1962), 558-572
- [65] R.Ryan, The F. and M. Riesz theorem for vector measures, Indag. Math. 66 (1963), 408-412
- [66] D.Sarason, Algebras of functions on the unit circle, BAMS 79 (1973), 286-299
- [67] I.Singer, Sur les applications linéaires intégrales des espaces des fonctions continue, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 4 (1959), 391-401
- [68] M.Talagrand, Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$ -analytiques, Ann. Math. 110 (1979), 407-438
- [69] M.Talagrand, Quand l'espace des mesures a variation bornée est-il faiblement séquentiellement complet?, PAMS 90 (1984), 285-288
- [70] A.V.Tolokonnikov, Estimates in the Carleson corona theorem, ideals of the algebra H^∞ , a problem of Sz.-Nagy, J. Sov. Math. 22 (1983), 1814-1828
- [71] A.V.Tolokonnikov, Interpolating Blaschke products and ideals of the algebra H^∞ , Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 126 (1983), 196-201 (MR 84k:30038)
- [72] P. Wojtaszczyk, Decompositions of H_p spaces, Duke Math. J. 46 (1979), 635-644
- [73] P.Wojtaszczyk, The Banach space H_1 , in: Functional Analysis: Surveys and Results III, North Holland Math. Studies 90, 1984, 1-33
- [74] D.R.Yafaev, Counterexample to a uniqueness theorem for analytic operator functions, J. Sov. Math. 22 (1983), 1872-1874

beurlaubt für Tätigkeit als assistant lecturer
am University College Dublin, Irland

